

Roman Brilej, Dezider Ivanec, Barbara Kušar

OMEGA 4

**Zaporedja, zveznost in limita funkcije,
odvod, integral**

Zbirka nalog za matematiko v 4. letniku
gimnazijskega izobraževanja

Ljubljana 2013

Kazalo

1	Zaporedja	5
1.1	Definicija in lastnosti zaporedij	6
1.2	Aritmetično zaporedje	9
1.3	Vsota n členov aritmetičnega zaporedja	13
1.4	Geometrijsko zaporedje	16
1.5	Vsota n členov geometrijskega zaporedja	20
1.6	Popolna indukcija	22
1.7	Limita zaporedja	23
1.8	Geometrijska vrsta	27
1.9	Obrestno obrestni račun	30
1.10	Naloga za ponavljanje	36
2	Zveznost in limita funkcije	39
2.1	Operacije v množici funkcij	40
2.2	Limita funkcije in zveznost	43
2.3	Neskončna limita in limita v neskončnosti	49
2.4	Lastnosti zveznih funkcij	54
2.5	Naloga za ponavljanje	55
3	Odvod	59
3.1	Naklon premice	60
3.2	Definicija odvoda	64
3.3	Pravila za odvajanje	66
3.4	Odvod sestavljene funkcije	72
3.5	Odvodi nekaterih elementarnih funkcij	76
3.6	Aproksimacija z odvodom in diferencial	80
3.7	Naraščanje in padanje funkcij. Ekstremi	81
3.8	Naloga za ponavljanje	90

1.1 Definicija in lastnosti zaporedij

Zaporedje je funkcija iz množice naravnih števil v množico realnih števil. Tako definirano zaporedje je **neskončno**.

Funkcijske vrednosti v točkah $1, 2, 3 \dots$ označimo z $a_1, a_2, a_3 \dots$. Imenujemo jih **členi** zaporedja, a_n pa je **splošni člen**.

Končno zaporedje s k členi je funkcija iz množice $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ v množico realnih števil.

Zaporedje s splošnim členom a_n je:

- **naraščajoče**, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$a_n < a_{n+1}$$

- **padajoče**, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$a_n > a_{n+1}$$

- **monotono**, če je bodisi naraščajoče bodisi padajoče

- **omejeno navzgor**, če obstaja takšno število M (imenujemo ga **zgornja meja** zaporedja), da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$a_n \leq M$$

- **omejeno navzdol**, če obstaja takšno število m (imenujemo ga **spodnja meja** zaporedja), da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$a_n \geq m$$

- **omejeno**, če je omejeno navzdol in navzgor

1. Zapiši prve štiri člene zaporedja:

- | | | |
|------------------------------|---------------------|----------------------|
| a) $a_n = 4n + 2$ | b) $a_n = 1 - n^2$ | c) $a_n = -2$ |
| d) $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ | e) $a_n = (-1)^n$ | f) $a_n = 2^n - 1$ |
| g) $a_n = n\sqrt{n+1}$ | h) $a_n = \log_2 n$ | i) $a_n = \sin n\pi$ |

2. Zapiši prvih šest členov zaporedja:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $a_n = n + (-1)^n n$ | b) $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ | c) $a_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ |
| d) $a_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)$ | e) $a_n = \frac{1}{n} \cos n\pi$ | f) $a_n = \cos\left(\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}\right)$ |
| g) $a_n = \begin{cases} n; & 2 n \\ -n; & 2 \nmid n \end{cases}$ | h) $a_n = \begin{cases} (-1)^n; & 3 n \\ n+1; & 3 \nmid n \end{cases}$ | |

□3. Zapiši prvih pet členov zaporedja, če je:

a) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$

b) $a_1 = -1, a_{n+1} = -2a_n$

c) $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n - \frac{1}{2}$

d) $a_1 = -2, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$

e) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

f) $a_1 = 3, a_2 = -1, a_{n+2} = a_n a_{n+1}$

4. Izračunaj iskani člen zaporedja:

a) $a_n = 3n + 4, a_7 = ?$

b) $a_n = \frac{n+4}{2n-1}, a_{14} = ?$

c) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+7}, a_9 = ?$

d) $a_n = \sqrt[n]{n^2}, a_4 = ?$

e) $a_n = \sin \frac{n\pi}{6}, a_{117} = ?$

f) $a_n = \tan \frac{n\pi}{3}, a_{700} = ?$

g) $a_n = \begin{cases} n^2; & 3|n \\ 1-n; & 3|(n+1), \\ 2+n; & 3|(n+2) \end{cases} a_{37} = ?$

h) $a_n = \begin{cases} 2n-1; & \log_2 n \in \mathbf{Z} \\ \sqrt{n-1}; & \log_2 n \notin \mathbf{Z} \end{cases}, a_{37} = ?$

□5. Izračunaj 8. člen zaporedja, če je:

a) $a_1 = 4, a_{n+1} = 2a_n - 5$

b) $a_1 = 2, a_{n+1} = 1 - \frac{3}{2}a_n$

c) $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1, a_{n+3} = a_n + a_{n+1}a_{n+2}$

6. Nariši graf zaporedja:

a) $a_n = n + 1$

b) $a_n = \frac{9-3n}{2}$

c) $a_n = 2 + 2^{3-n}$

d) $a_n = \frac{n-1}{2n-5}$

e) $a_n = n - (-1)^n$

f) $a_n = (-1)^n(1-n)$

7. Poišči najpreprostejši predpis za splošni člen, ki mu zadoščajo začetni členi zaporedja:

a) 5, 6, 7, 8, 9 ...

b) -4, -2, 0, 2, 4 ...

c) 3, 6, 9, 12, 15 ...

d) 10, 6, 2, -2, -6 ...

e) 1, 4, 9, 16, 25 ...

f) 0, 1, 8, 27, 64 ...

g) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

h) $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{7}{16}, \frac{9}{20}, \dots$

i) $1, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{3}{4}, \frac{11}{15}, \dots$

j) $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \dots$

k) 2, 4, 8, 16, 32 ...

l) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{8}{5}, \frac{8}{3}, \dots$

8. Poišči najpreprostejši predpis za splošni člen, ki mu zadoščajo začetni členi zaporedja:

a) -1, 2, 7, 14, 23 ...

b) 0, 7, 26, 63, 124 ...

c) 5, 7, 11, 19, 35 ...

d) -1, 11, -25, 83, -241 ...

e) $1, \frac{4}{3}, 2, \frac{16}{5}, \frac{16}{3}, \dots$

f) $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{3}, \frac{17}{7}, \frac{13}{4}, \dots$

g) 1, 7, 17, 31, 49 ...

h) 8, 2, -10, -34, -82 ...

*i) 2, 2, 0, 4, 10, 6, 0, 8, 18, 10, 0, 12 ...

9. Kateri člen danega zaporedja je enak 2:

a) $a_n = 4n - 26$

b) $a_n = \frac{13-n}{n+2}$

c) $a_n = \frac{4n+5}{n+3}$

d) $a_n = n^2 - 4n - 3$

$$\begin{array}{ll} \text{e)} a_n = \frac{n^2 - 3}{n + 2} & \text{f)} a_n = 2^{n+1} - 5 \cdot 2^{n-2} - 46 \\ \text{g)} a_n = 9^n - 28 \cdot 3^{n+1} + 245 & \text{h)} a_n = \log_n 9 - 1 \\ \text{i)} a_n = 2 \sin \frac{n\pi}{4} & \text{j)} a_n = 1 + 2 \cos \frac{n\pi}{4} \end{array}$$

10. Pokaži, da je dano zaporedje naraščajoče:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a_n = 4n - 5 & \text{b)} a_n = \frac{n-1}{n+1} & \text{c)} a_n = n^2 + n \\ \text{d)} a_n = (\sqrt{2})^n & \text{e)} a_n = \frac{2^n}{1+2^n} & \text{f)} a_n = \frac{3^n}{n+3} \\ \text{*g)} a_n = \log(3^n - 1) & \text{*h)} a_n = \cos \frac{\pi}{n} & \text{*i)} a_n = \sin \frac{n\pi}{2n+1} \end{array}$$

11. Pokaži, da je dano zaporedje padajoče:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a_n = 2 - 3n & \text{b)} a_n = \frac{2n+4}{3n+5} & \text{c)} a_n = \frac{2-n^2}{n+1} \\ \text{d)} a_n = (\pi - 3)^n & \text{*e)} a_n = \frac{2n+1}{3^n+1} & \text{*f)} a_n = -2n^3 + n^2 + 2n + 1 \end{array}$$

*12. Določi tak p , da bo dano zaporedje padajoče:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a_n = pn - p + 1 & \text{b)} a_n = \frac{n+1}{n+p} & \text{c)} a_n = \log(1 + p^n) \end{array}$$

13. Ugotovi, ali je dano zaporedje monotono:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a_n = 1 - \frac{1}{n} & \text{b)} a_n = \frac{n}{2n-7} & \text{c)} a_n = \frac{2^n}{3^n-1} \\ \text{d)} a_n = -4 \cdot (-3)^n & \text{e)} a_n = \sqrt{n^2+1} & \text{f)} a_n = 2^{-n} + 2^n \\ \text{*g)} a_n = n^3 - 20n^2 + 100n + 200 & & \text{*h)} a_n = \sin \frac{2^{n+1}\pi}{0 \cdot 1 + 2^n} \\ \text{*i)} a_n = \ln(2 + \sqrt[n]{3}) & & \end{array}$$

14. Pokaži, da je $m = 1$ spodnja meja zaporedja:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a_n = 2n - 1 & \text{b)} a_n = \frac{n+2}{n+1} & \text{c)} a_n = n^2 + 2n - 2 \\ \text{d)} a_n = 3 + \sin \frac{n\pi}{7} & \text{e)} a_n = \log_2 3^n & \text{*f)} a_n = \frac{3^n}{n+2^n} \end{array}$$

15. Pokaži, da je dano zaporedje navzdol omejeno:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a_n = n^3 - 7 & \text{b)} a_n = \frac{n}{2n-1} & \text{c)} a_n = \frac{3n+5}{2-4n} \\ \text{d)} a_n = \sin n^2 & \text{e)} a_n = -2^{\cos \frac{n\pi}{3}} & \text{*f)} a_n = 1 - \frac{1}{n} \log(1+2^n) \end{array}$$

16. Pokaži, da je M zgornja meja danega zaporedja:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a_n = 1 - 2n, M = 1 & \text{b)} a_n = \frac{n+2}{2n+3}, M = \frac{5}{6} \\ \text{c)} a_n = 20n - n^2, M = 100 & \text{d)} a_n = \frac{5n-1}{n^2+7}, M = 1 \\ \text{e)} a_n = \frac{1}{3+2\sin \frac{\pi}{n}}, M = \frac{1}{3} & \text{*f)} a_n = -n^3 + 6n^2 - 12n + 16, M = 5 \end{array}$$

17. Pokaži, da je dano zaporedje navzgor omejeno:

a) $a_n = \frac{3n-2}{4n+1}$

b) $a_n = \frac{n^2-1}{2-3n}$

c) $a_n = \frac{-n^2+12n-13}{n+6}$

d) $a_n = n \cdot 2^{-n}$

e) $a_n = \frac{1}{\pi-n}$

*f) $a_n = \frac{1 + \sin \frac{n\pi}{3}}{\sin \frac{n\pi}{6} + \cos \frac{n\pi}{6}}$

18. Ali je dano zaporedje navzdol oziroma navzgor omejeno:

a) $a_n = 3 - 5n$

b) $a_n = \frac{1-2n}{n+1}$

c) $a_n = \frac{n^2-30}{2n-1}$

d) $a_n = |10n - n^2|$

e) $a_n = \frac{n}{\sqrt{17-n}}$

f) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

g) $a_n = (-1)^n(n+4)$

h) $a_n = (-\sqrt{2})^n$

*i) $a_n = \sqrt[n]{n}$

*j) $a_n = n \sin \frac{n\pi}{7}$

*k) $a_n = \frac{2^n}{2^n - 3^n}$

*l) $a_n = 2^{-\lceil \frac{1}{\sin n} \rceil}$

19. Razišči monotonost in omejenost zaporedja:

a) $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$

b) $a_n = \frac{(-2)^n}{3+2^n}$

c) $a_n = 10n - n^2$

d) $a_n = 2^n + \frac{(-1)^n}{n}$

e) $a_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$

*f) $a_n = 1 - \log_2(1-2^{-n})$

*g) $a_n = n + \sin n$

*h) $a_n = \frac{(-n)^n}{3^n + 2^n}$

*i) $a_n = \frac{n^3}{80 - n^2}$

1.2 Aritmetično zaporedje

Zaporedje je **aritmetično**, če je razlika $a_{n+1} - a_n$ sosednih členov stalna. To razliko označimo z d in jo imenujemo **diferenca** ali **razlika** aritmetičnega zaporedja. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$a_{n+1} - a_n = d$$

Splošni člen aritmetičnega zaporedja je:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Če med števili a in b vrinemo r števil, tako da so vsa števila zaporedni členi aritmetičnega zaporedja, je diferenca tega zaporedja:

$$d = \frac{b-a}{r+1}$$

20. Zapiši prve štiri člene aritmetičnega zaporedja s prvim členom a_1 in diferenco d :

a) $a_1 = 4, d = 3$

b) $a_1 = 20, d = -5$

c) $a_1 = \frac{1}{3}, d = \frac{1}{6}$

d) $a_1 = -\frac{3}{4}, d = -\frac{1}{3}$

e) $a_1 = 12 - 4\sqrt{3}, d = 2 - \sqrt{3}$

21. Izračunaj 8. člen aritmetičnega zaporedja:

- a) 3, 12, 21 ... b) 50, 18, -14 ... c) $-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6} \dots$
d) $\pi, \pi, \pi \dots$ e) $17 + 8\sqrt{2}, 12 + 15\sqrt{2}, 7 + 22\sqrt{2} \dots$

22. Zapiši prve tri člene aritmetičnega zaporedja s podatki:

- a) $a_6 = 19, d = 5$ b) $a_{10} = -29, d = -8$
c) $a_9 = -11, d = -\frac{10}{7}$ d) $a_{93} = 31\pi, d = \frac{\pi}{3}$
e) $a_{12} = -9p + 43q, d = -p + 4q$ f) $a_5 = \log 48, d = \log 2$

23. Zapiši splošni člen aritmetičnega zaporedja, če je:

- a) $a_1 = -1, a_7 = -13$ b) $a_1 = -1, a_8 = 48$
c) $a_1 = \frac{1}{4}, a_9 = -\frac{15}{4}$ d) $a_1 = -2\sqrt{2}, a_{12} = 9\sqrt{2}$
e) $a_1 = 2^p, a_{16} = 2^{p+4}$ f) $a_1 = \frac{2p-3}{p^2-1}, a_{10} = \frac{11p+6}{p^2-1}$

24. Določi diferenco aritmetičnega zaporedja:

- a) $a_n = 6n - 17$ b) $a_n = \frac{2n+3}{7}$ c) $a_n = -\pi$

25. Izračunaj iskani člen aritmetičnega zaporedja iz danih podatkov:

- a) $a_5 = 22, a_{13} = 54; a_{20} = ?$ b) $a_4 = 5, a_{21} = 90; a_{10} = ?$
c) $a_8 = 95, a_{15} = -10; a_4 = ?$ d) $a_9 = -\frac{3}{2}, a_{19} = -4; a_{35} = ?$
e) $a_8 = \frac{13}{2}, a_{13} = \frac{32}{3}; a_{17} = ?$
f) $a_6 = -9 + 2\sqrt{5}, a_{13} = -23 + 9\sqrt{5}; a_3 = ?$

26. Določi prvi člen in diferenco aritmetičnega zaporedja, pri katerem je:

- a) $a_8 = 31, a_4 + a_{17} = 87$ b) $a_5 + a_{10} = 25, a_{20} + a_{25} = -65$
c) $a_4 + a_7 = \frac{5}{2}, a_{13} - a_{29} = 12$ d) $a_3 = 4a_6, a_7 = 1 + a_9$
e) $a_4 + a_{10} = 12, a_6 \cdot a_7 = 18$ f) $a_{15} = 6a_5, a_2 \cdot a_{10} = -28$
g) $a_3 + a_{21} = 7, a_7 \cdot a_{13} = 22$ *h) $a_3 + a_5 + a_7 = -12, a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = -90$

27. Ali je število 3 člen aritmetičnega zaporedja z danimi podatki? Če je, zapiši kateri:

- a) $a_n = 14 - 5n$ b) $a_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{3}$
c) $a_1 = 66, d = -7$ d) $a_1 = -213, a_2 = -191$
e) $a_9 = 1 - 4\sqrt{3}, a_{10} = 2 - 2\sqrt{3}$ f) $a_3 = -9 + 6p, a_{11} = 23 - 10p$

28. Ali zapisani členi pripadajo aritmetičnemu zaporedju:

- a) $a_2 = 6, a_7 = -14, a_{12} = -30$ b) $a_3 = -42, a_8 = 18, a_{17} = 126$
c) $a_4 = 3, a_{12} = -7, a_{22} = -19 \cdot 5$ d) $a_{12} = 16, a_{23} = -713, a_{57} = 16$
e) $a_3 = \frac{2}{3}, a_9 = \frac{1}{5}, a_{18} = -\frac{1}{2}$
f) $a_2 = 5 - 6\sqrt{3}, a_7 = 20 - \sqrt{3}, a_{16} = 47 + 8\sqrt{3}$

29. Ali so dana števila zaporedni členi aritmetičnega zaporedja:

a) 13, 22, 31

b) $-76, -53, -27$

c) $\frac{3}{7}, \frac{4}{21}, -\frac{1}{21}$

d) $3 - 2\sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}, -1 - 4\sqrt{7}$

e) $(p+q)^2, p^2+q^2, (p-q)^2$

30. Določi tak x , da bodo vrednosti danih izrazov tvorile končno aritmetično zaporedje:

a) $x - 1, 7 - x, 2x$

b) $3 - x, |x|, x - 1$

c) $3 - x^2, x - 2, 6x - 11$

d) $\sqrt{x-1}, 3 + \sqrt{2x}, 6 + \sqrt{x+7}$

e) $\frac{x+4}{x-3}, \frac{x+6}{2}, \frac{4}{x-2}$

f) $2^x, 2^{x+1} - 1, 4^x - 6$

g) $\log_2(1+x), 1 + \log_2(3x-1), \log_2(3x+5)$

h) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right), \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

31. Določi taka x in y , da bodo vrednosti danih izrazov tvorile končno aritmetično zaporedje:

a) $x + y + 4, x - y + 2, 3x - y + 2, 7x - y$

*b) $2^y, 3 \cdot 2^x, 2^{x+y-1}, 2^{x+2} + 2^x$

*c) $\sqrt{x+1} - 1, \sqrt{y-x}, \sqrt{4y-5x-1} + 1, \sqrt{15y-19x-10} + 2$

32. Med števili a in b vrini r členov, tako da bo nastalo končno aritmetično zaporedje. Zapiši prvi vrinjeni člen:

a) $a = 3, b = 47, r = 10$

b) $a = 5, b = -35, r = 19$

c) $a = -\frac{7}{8}, b = \frac{83}{8}, r = 14$

d) $a = 17 - 8\sqrt{2}, b = -16 + 14\sqrt{2}, r = 10$

e) $a = \log 3, b = \log 96, r = 4$

f) $a = 2^{p-n}, b = 2^{p+n}, r = 4^n - 2$

33. Koliko členov moramo vriniti med števili a in b , da dobimo končno aritmetično zaporedje z diferenco d :

a) $a = -12, b = 81, d = 3$

b) $a = 56, b = -40, d = -6$

c) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{24}$

d) $a = 7p + 8q, b = 21p - 34q, d = 2p - 6q$

34. Kateri členi aritmetičnega zaporedja z danimi podatki so manjši od 100:

a) $a_n = 3n + 7$

b) $a_1 = 350, d = -9$

c) $a_7 = 4, a_{19} = 8$

d) $a_4 + a_{12} = 32 + 8\sqrt{3}, a_7 + a_{20} = 54 + 19\sqrt{3}$

35. Koliko trimestrih števil je deljivih s:

a) 7

b) 15

c) 23

d) 37

e) 43

36. Dokaži, da je zaporedje a_n aritmetično:

a) $a_n = 2n + 1$

b) $a_n = 3 - 2n$

c) $a_n = \sqrt{2}n$

d) $a_n = \pi n + \sqrt{2}$

37. Dano je aritmetično zaporedje a_n s prvim členom a in diferenco δ . Naj bo zaporedje b_n dano s predpisom:

a) $b_n = a_n + 3$ b) $b_n = 1 - a_n$ c) $b_n = ka_n, k \in \mathbb{R}$

Pokaži, da je zaporedje b_n aritmetično, ter zapiši prvi člen in diferenco tega zaporedja.

***38.** Dano je aritmetično zaporedje a_n s prvim členom a in diferenco δ . Pri katerem pogoju je tudi zaporedje b_n aritmetično:

a) $b_n = a_n^2$ b) $b_n = \log a_n$ c) $b_n = \sin a_n$

39. Določi takšno aritmetično zaporedje a_n , pri katerem za poljubni naravni števili i in j velja:

$$a_i + a_j = a_{i+j}$$

40. Iz aritmetičnega zaporedja a_n s prvim členom a in diferenco δ izločimo vse tiste člene, katerih indeksi pri deljenju z 11 ne dajo ostanka 2. Pokaži, da členi, ki ostanejo, sestavljajo aritmetično zaporedje. Zapiši prvi člen in diferenco tega zaporedja.

41. Kdaj je aritmetično zaporedje omejeno?

***42.** Naj bo f kvadratna funkcija. Pokaži, da je zaporedje

$$a_n = f(x+n) - f(x+n-1)$$

za poljuben x aritmetično.

43. Stranice pravokotnega trikotnika oblikujejo končno aritmetično zaporedje. Izračunaj dolžine stranic, če je obseg trikotnika:

a) $o = 12$ b) $o = 48$ c) $o = 60$

44. Določi najmanjši kot v pravokotnem trikotniku, katerega stranice oblikujejo končno aritmetično zaporedje.

***45.** V rombu $ABCD$ stranica in diagonali oblikujejo končno aritmetično zaporedje a, f, e . Izračunaj kot α .

46. Stranice trikotnika s ploščino S oblikujejo končno aritmetično zaporedje z diferenco d . Izračunaj dolžine stranic:

a) $S = 24, d = 2$ b) $S = 42\sqrt{2}, d = 5$ c) $S = 16\sqrt{21}, d = 6$

***47.** Notranji koti trikotnika oblikujejo končno aritmetično zaporedje. Določi te kote, če veš, da je najdaljša trikotnikova stranica dvakrat daljša od najkrajše.

***48.** Določi robove kvadra s prostornino 6 in površino 22, če le-ti oblikujejo končno aritmetično zaporedje.

****49.** Dana so pozitivna števila a, b in c , katerih kvadrati oblikujejo končno aritmetično zaporedje. Dokaži, da je končno aritmetično zaporedje tudi:

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$$

****50.** Določi tak a , da bodo rešitve dane enačbe oblikovale končno aritmetično zaporedje:

a) $x^4 - ax^2 + a - 1 = 0$

b) $x^4 - (3a + 1)x^2 + a + 6 = 0$

1.3 Vsota n členov aritmetičnega zaporedja

Vsoto s_n prvih n členov aritmetičnega zaporedja imenujemo **končna aritmetična vrsta** in jo krajše zapišemo s simbolom \sum :

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Ta vsota je enaka:

$$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad \text{ali} \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

51. Izračunaj vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja z danimi podatki:

a) $a_1 = 4, d = 3, n = 18$

b) $a_1 = 68, d = -2, n = 25$

c) $a_1 = \frac{2}{3}, d = \frac{1}{6}, n = 32$

d) $a_1 = 16\sqrt{3}, d = 2 - \sqrt{3}, n = 13$

e) $a_1 = 40, a_2 = 35, n = 15$

f) $a_5 = 0,2, a_{13} = 3,4, n = 47$

g) $a_2 + a_5 = \pi + 4, a_6 + a_{10} = 31 - 8\pi, n = 21$

52. Izračunaj:

a) $3 + 8 + 13 + \dots + 78$

b) $65 + 61 + 57 + \dots + 17$

c) $-1 - 4 - 7 - \dots - 151$

d) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 + \dots + \frac{47}{3}$

53. Izračunaj vsoto prvih:

a) 100 naravnih števil

b) 70 lihih naravnih števil

c) 200 sodih naravnih števil

d) 50 sodih naravnih števil

e) 300 naravnih števil, ki so deljiva z 9

f) 61 naravnih števil, ki so deljiva s 13

g) 165 naravnih števil, ki dajo pri deljenju s 15 ostanek 9

h) 80 naravnih števil, ki dajo pri deljenju z 31 ostanek 17

54. Izračunaj vsoto prvih 45 členov aritmetičnega zaporedja s splošnim členom:

a) $a_n = 3n + 4$

b) $a_n = 2n - 7$

c) $a_n = 8 - 5n$

d) $a_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{2}$

e) $a_n = 1 - \frac{3}{4}n$

f) $a_n = (1 - \sqrt{3})n + 2\sqrt{3}$

Rešitve

1. a) 6, 10, 14, 18 b) 0, -3, -8, -15 c) -2, -2, -2, -2 d) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}$
 e) -1, 1, -1, 1 f) 1, 3, 7, 15 g) $\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 6, 4\sqrt{5}$ h) 0, 1, $\log_2 3, 2$
 i) 0, 0, 0, 0

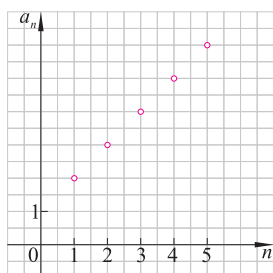
2. a) 0, 4, 0, 8, 0, 12 b) 0, -1, 0, 1, 0, -1 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$
 d) -1, 1, -1, 1, -1, 1 e) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ f) 0, 0, 0, 0, 0, 0
 g) -1, 2, -3, 4, -5, 6 h) 2, 3, -1, 5, 6, 1

3. a) 2, 5, 8, 11, 14 b) -1, 2, -4, 8, -16 c) $3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{11}{18}, -\frac{19}{27}$
 d) -2, 2, $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$ e) 1, 4, 5, 9, 14 f) 3, -1, -3, 3, -9

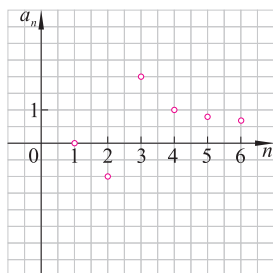
4. a) $a_7 = 25$ b) $a_{14} = \frac{2}{3}$ c) $a_9 = -1$ d) $a_4 = 2$ e) $a_{117} = -1$ f) $a_{700} = \sqrt{3}$
 g) $a_{37} = 39$ h) $a_{37} = 6$

5. a) $a_8 = -123$ b) $a_8 = -\frac{431}{16}$ c) $a_8 = -7$

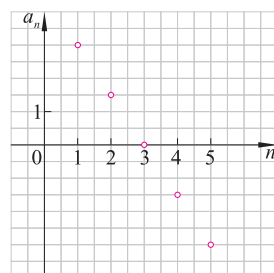
6. a)



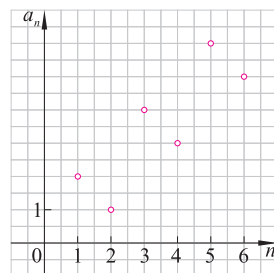
d)



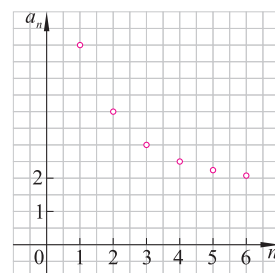
b)



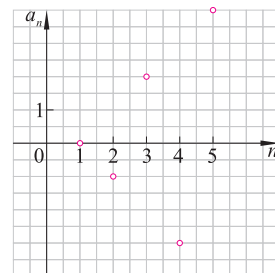
e)



c)



f)



7. a) $a_n = n + 4$ b) $a_n = 2n - 6$ c) $a_n = 3n$ d) $a_n = 14 - 4n$ e) $a_n = n^2$
 f) $a_n = (n - 1)^3$ g) $a_n = \frac{n}{n + 1}$ h) $a_n = \frac{2n - 1}{4n}$ i) $a_n = \frac{2n + 1}{3n}$ j) $a_n = \frac{2}{n}$
 k) $a_n = 2^n$ l) $a_n = \frac{2^{n-1}}{n + 1}$

8. a) $a_n = n^2 - 2$ b) $a_n = n^3 - 1$ c) $a_n = 2^n + 3$ d) $a_n = (-3)^n + 2$
 e) $a_n = \frac{2^n}{n + 1}$ f) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 3}$ g) $a_n = 2n^2 - 1$ h) $a_n = -3 \cdot 2^n + 14$

i) $a_n = n \left(\sin \frac{n\pi}{2} + 1 \right)$

9. a) a_7 b) a_3 c) Noben. d) a_5 e) Noben. f) a_6 g) a_1 in a_4 h) Noben.
 i) $a_i, i = 2 + 8k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ j) Noben.