

Roman Brilej, Barbara Kušar

# alfa

## **Geometrijski liki in telesa**

Zbirka nalog za matematiko v  
srednjem strokovnem izobraževanju

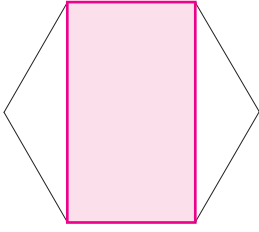
Ljubljana 2014

# Kazalo

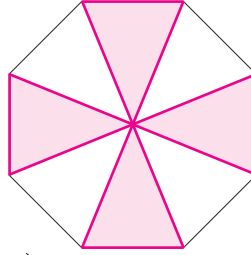
<b>1 Geometrijski liki</b>	<b>5</b>
1.1 Večkotniki . . . . .	6
1.2 Razreševanje trikotnika . . . . .	47
1.3 Krog . . . . .	68
1.4 Naloge za ponavljanje . . . . .	81
<b>2 Geometrijska telesa</b>	<b>85</b>
2.1 Prizma . . . . .	86
2.2 Piramida . . . . .	114
2.3 Valj . . . . .	132
2.4 Stožec . . . . .	139
2.5 Krogla . . . . .	150
2.6 Naloge za ponavljanje . . . . .	158
<b>Rešitve</b>	<b>161</b>

103. Izračunaj ploščino osenčenega lika, če meri stranica  $a$  ustreznega pravilnega večkotnika 10 cm:

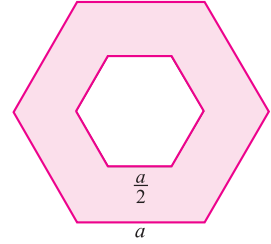
a)



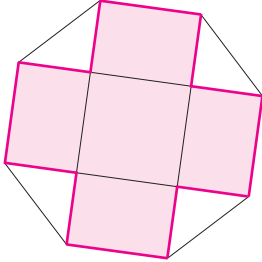
b)



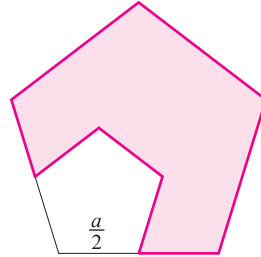
c)



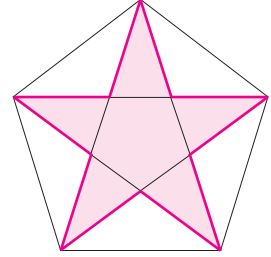
d)



e)



f)



\*104. Pravilnemu  $n$ -kotniku včrtamo še en pravilni  $n$ -kotnik, tako da povežemo razpolovišča stranic prvotnega. Poišči razmerje ploščin obeh  $n$ -kotnikov za:

a)  $n = 3$

b)  $n = 4$

c)  $n = 6$

d)  $n = 12$

## 1.2 Razreševanje trikotnika

### Heronov obrazec

$$s = \frac{a + b + c}{2} \quad (\text{polovični obseg})$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

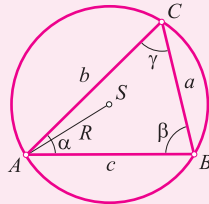
### Polmer trikotniku očrtanega kroga

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Enakostranični trikotnik:

$$R = \frac{2}{3}v = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



### Sinusni izrek

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

### Kosinusni izrek

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

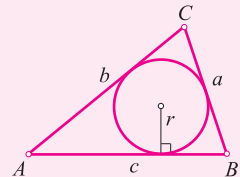
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

### Polmer trikotniku včrtanega kroga

$$r = \frac{S}{s}$$

Enakostranični trikotnik:

$$r = \frac{1}{3}v = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



## Heronov obrazec

### Zgledi

1. Izračunaj ploščino trikotnika s stranicami  $a = 11$  cm,  $b = 20$  cm,  $c = 13$  cm.  
*Rešitev:* Ploščina trikotnika s stranicami  $a$ ,  $b$  in  $c$  je:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

S črko  $s$  smo označili polovični obseg trikotnika:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

To formulo za izračun ploščine imenujemo Heronov obrazec. Najprej izračunajmo  $s$ :

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{11+20+13}{2} = 22 \text{ cm}$$

Tako je ploščina:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{22(22-11)(22-20)(22-13)} = \\ &= \sqrt{22 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 9} = \sqrt{2 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 9} = \sqrt{2^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2} = \\ &= 2 \cdot 11 \cdot 3 = 66 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Seveda bi lahko zgornje računanje opravili z računalom, vendar smo kljub temu pokazali malo računske spretnosti.

2. Izračunaj dolžino najkrajše višine  $v$  v trikotniku s stranicami  $a = 1{,}7$  m,  $b = 2{,}6$  m,  $c = 2{,}5$  m.

*Rešitev:* Višina nastopa v obrazcu za ploščino trikotnika:

$$S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c$$

Ker lahko ploščino trikotnika izračunamo s Heronovim obrazcem, bomo nato iz ene izmed gornjih formul izračunali še višino. Najprej izračunajmo ploščino trikotnika. Polovični obseg trikotnika je:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1{,}7+2{,}6+2{,}5}{2} = 3{,}4 \text{ m}$$

Tako je ploščina:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \\ &= \sqrt{3{,}4(3{,}4-1{,}7)(3{,}4-2{,}6)(3{,}4-2{,}5)} = 2{,}04 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Sedaj razmislimo, katera višina je najkrajša. Ker je produkt stranice in višine na njo enak dvojni ploščini, torej pri danem trikotniku konstanten, je najkrajša

Ploščina trikotnika je:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 35 \dots \cdot 4 \cdot 02 \dots \cdot \sin 57^\circ \doteq 5 \cdot 67 \text{ cm}^2$$

## Naloge

**132.** Izračunaj tretjo stranico v trikotniku s podatki:

- a)  $a = 8 \text{ cm}$ ,  $c = 7 \text{ cm}$ ,  $\beta = 120^\circ$       b)  $a = b = 1 \cdot 4 \text{ m}$ ,  $\gamma = 58^\circ$   
 c)  $b = 12 \text{ dm}$ ,  $c = 20 \text{ dm}$ ,  $\alpha = 34^\circ 40'$       d)  $b = 12 \cdot 8 \text{ m}$ ,  $c = 14 \cdot 2 \text{ m}$ ,  $\alpha = 100^\circ 30'$

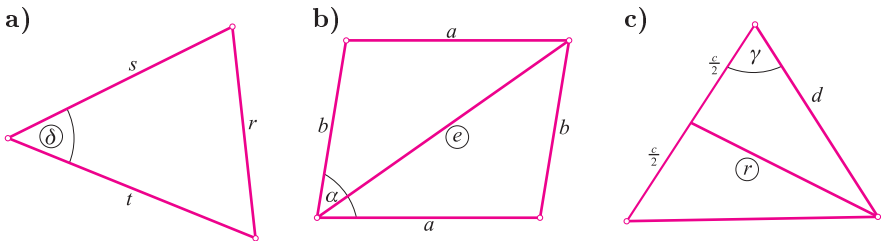
**133.** Na minuto natančno izračunaj največji in najmanjši kot v trikotniku s stranicami:

- a)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ ,  $c = 10 \text{ cm}$       b)  $a = 12 \cdot 8 \text{ m}$ ,  $b = 8 \cdot 2 \text{ m}$ ,  $c = 6 \cdot 3 \text{ m}$   
 c)  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ ,  $c = 9 \text{ cm}$       d)  $a = 240 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ dm}$ ,  $c = 1 \cdot 8 \text{ m}$   
 e)  $a = 11 \cdot 2 \text{ m}$ ,  $b = 10 \cdot 8 \text{ m}$ ,  $c = 9 \cdot 6 \text{ m}$       f)  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 3 \text{ cm}$

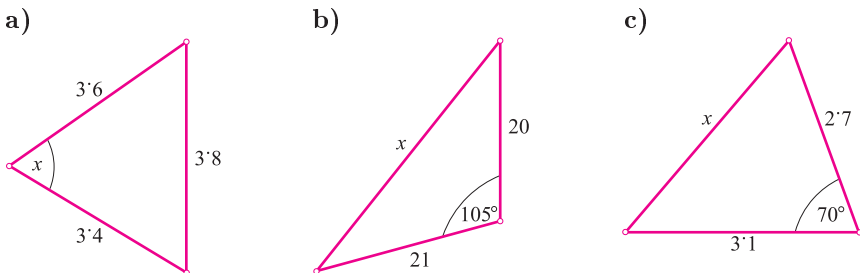
**134.** Kolikšen je obseg trikotnika z danima stranicama in kotom med njima:

- a)  $a = 8 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 60^\circ$       b)  $b = c = 2 \cdot 5 \text{ dm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$   
 c)  $a = 11 \cdot 88 \text{ m}$ ,  $c = 105 \cdot 52 \text{ m}$ ,  $\beta = 138^\circ 30'$

**135.** Zapiši izrek za računanje obkrožene stranice oziroma kota:



**136.** Izračunaj kot oziroma stranico  $x$ , če so mere zapisane v centimetrih:



**137.** V trikotniku poznamo stranici  $a = 10 \cdot 4 \text{ m}$  in  $b = 14 \text{ m}$ , višina na  $a$  pa meri  $12 \cdot 5 \text{ m}$ . Koliko meri kot  $\gamma$  in koliko stranica  $c$ ?

**138.** Koliko meri težiščnica na stranico  $a$  v trikotniku s podatki:

- a)  $a = 12 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 78^\circ$       b)  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 62^\circ$   
 c)  $a = 12 \text{ m}$ ,  $c = 16 \text{ m}$ ,  $\beta = 45^\circ$       d)  $a = 0 \cdot 4 \text{ dm}$ ,  $c = 0 \cdot 5 \text{ dm}$ ,  $\beta = 110^\circ$

**139.** Kolikšna je dolžina težiščnice na stranico  $c$  v trikotniku s stranicami:

- a)  $a = 8 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 10 \text{ cm}$       b)  $a = 5 \text{ m}$ ,  $b = 3 \text{ m}$ ,  $c = 4 \text{ m}$   
 c)  $a = 24 \text{ dm}$ ,  $b = 15 \text{ dm}$ ,  $c = 18 \text{ dm}$       d)  $a = 5 \cdot 4 \text{ m}$ ,  $b = 4 \cdot 7 \text{ m}$ ,  $c = 3 \cdot 6 \text{ m}$

**140.** V deltoиду oklepata stranici  $a$  in  $b$  kot  $\alpha$ . Izračunaj dolžini obeh diagonal v deltoиду, če je:

- a)  $a = 3.5$  cm,  $b = 7.5$  cm,  $\alpha = 135^\circ$     b)  $a = 6$  m,  $b = 4$  m,  $\alpha = 70^\circ$   
 c)  $a = 1$  m,  $b = 0.8$  m,  $\alpha = 115^\circ$     d)  $a = 12$  cm,  $b = 7$  cm,  $\alpha = 86^\circ$

**141.** Izračunaj dolžini diagonal paralelograma s podatki:

- a)  $a = 12.5$  m,  $b = 10.2$  m,  $\alpha = 50^\circ$     b)  $a = 10$  m,  $b = 8$  m,  $\alpha = 55^\circ$   
 c)  $a = 24$  cm,  $b = 15$  cm,  $\beta = 118^\circ$     d)  $a = 8.5$  dm,  $b = 10.4$  dm,  $\beta = 77^\circ$

**142.** V trikotniku meri stranica  $c = 12$  cm, kot  $\gamma = 120^\circ$ . Koliko merita stranici  $a$  in  $b$ , če sta v razmerju:

- a) 3 : 4                      b) 4 : 1                      c) 1 : 2

**143.** Določi dolžini diagonal v trapezu z danimi podatki:

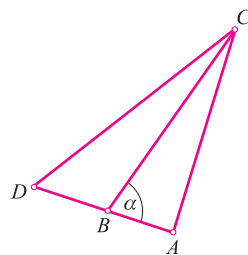
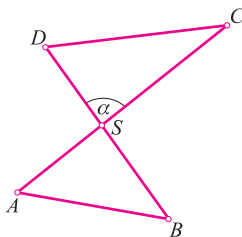
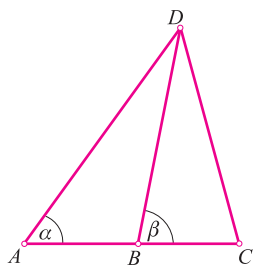
- a)  $a = 1$  m,  $b = 7$  dm,  $c = 6$  dm,  $\beta = 80^\circ$   
 b)  $a = 16$  cm,  $b = 5$  cm,  $c = 10$  cm,  $\beta = 45^\circ$   
 c)  $a = 2$  m,  $b = c = 1$  m,  $\beta = 75^\circ$   
 d)  $a = 6$  dm,  $b = 2$  dm,  $c = 3$  dm,  $\beta = 15^\circ$

**144.** Izračunaj kota  $\alpha$  in  $\beta$  v trapezu s stranicami:

- a)  $a = 16$  m,  $b = 14$  m,  $c = 6$  m,  $d = 12$  m  
 b)  $a = 22$  m,  $b = 21$  m,  $c = 12$  m,  $d = 17$  m  
 c)  $a = 4.4$  dm,  $b = 2.5$  dm,  $c = 0.8$  dm,  $d = 2.9$  dm  
 d)  $a = 12$  cm,  $b = 7$  cm,  $c = 4$  cm,  $d = 5$  cm

**145.** Na sliki iz danih podatkov določi iskano dolžino oziroma kot:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| <p>a) <math> AB  = 2.1</math> km<br/> <math> BC  = 1.8</math> km<br/> <math> AD  = 4.8</math> km<br/> <math>\alpha = 53^\circ</math><br/> <math>\beta,  CD  = ?</math></p> | <p>b) <math> AC  = 5</math> cm<br/> <math> DC  = 3.7</math> cm<br/> <math> DS  = 1.5</math> cm<br/> <math> SB  = 1.8</math> cm<br/> <math>\alpha = 92^\circ</math><br/> <math> AB  = ?</math></p> | <p>c) <math> AC  = 4.5</math> cm<br/> <math> BC  = 4.7</math> cm<br/> <math> AB  = 1.4</math> cm<br/> <math> AD  = 3.2</math> cm<br/> <math>\alpha,  DC  = ?</math></p> |
|--|---|---|



**\*146.** V trikotniku je razmerje dolžin dveh stranic 4 : 3, oklepata pa kot  $60^\circ$ . Izračunaj ploščino trikotnika, če meri polmer trikotniku očrtanega kroga  $R = 1.5$  m.

**\*147.** V paralelogramu s stranicama  $a = 8$  cm in  $b = 6$  cm meri kot med diagonalama  $60^\circ$ . Izračunaj dolžini diagonal.

175. 21·47%
176. a)  $13\pi \text{ cm}^2$    b)  $0\cdot41\pi \text{ m}^2$    c)  $89\pi \text{ cm}^2$    d)  $1\cdot625\pi \text{ dm}^2$
177. a) 3·7 cm   b) 0·59 dm   c) 0·74 m   d) 6·87 mm
178. a)  $12\cdot6 \text{ cm}^2$    b)  $2\cdot2 \text{ dm}^2$    c)  $42\cdot8 \text{ m}^2$    d)  $7\cdot93 \text{ km}^2$
179. a)  $16\cdot5 \text{ cm}^2$    b)  $3\cdot1 \text{ m}^2$    c)  $187\cdot4 \text{ dm}^2$    d)  $1352\cdot5 \text{ cm}^2$    e)  $378\cdot3 \text{ mm}^2$   
f)  $143\cdot7 \text{ m}^2$
180. a) 29·7%   b) 34·4%   c) 39·7%   d) 31·8%
181. V primeru kvadratnega zrcala, za  $0\cdot86 \text{ cm}^2$ .
182. 0·7 del več za kvadratni okvir.
183. a)  $0\cdot57 \text{ dm}^2$    b)  $0\cdot63 \text{ dm}^2$    c)  $0\cdot88 \text{ dm}^2$    d)  $1\cdot04 \text{ dm}^2$    e)  $1\cdot33 \text{ dm}^2$   
f)  $3\cdot80 \text{ dm}^2$    g)  $0\cdot28 \text{ dm}^2$    h)  $1\cdot76 \text{ dm}^2$
184. a) 13·60 cm   b) 0·61 m   c) 8·66 dm   d) 1·36 m   e) 4·71 mm   f) 3·16 cm
185. a)  $5\cdot75 \text{ dm}^2$    b)  $4\cdot45 \text{ cm}^2$    c)  $20\cdot38 \text{ dm}^2$    d)  $3\cdot53 \text{ m}^2$
186. a)  $113\cdot1 \text{ cm}^2$    b)  $18\cdot8 \text{ cm}^2$    c)  $82\cdot2 \text{ cm}^2$    d)  $41\cdot1 \text{ cm}^2$    e)  $56\cdot5 \text{ cm}^2$   
f)  $5\cdot8 \text{ cm}^2$
187. a)  $278\cdot5 \text{ cm}^2$    b)  $44\cdot2 \text{ cm}^2$    c)  $79\cdot3 \text{ cm}^2$    d)  $58\cdot9 \text{ cm}^2$    e)  $50 \text{ cm}^2$    f)  $24 \text{ cm}^2$
188. a) 2 : 1   b) 4 : 1
189. a)  $55\cdot27 \text{ cm}$    b)  $\frac{1}{3}$    c)  $\alpha = \gamma = 123^\circ 41'$ ,  $\beta = 22^\circ 37'$ ,  $\delta = 90^\circ$
190. a) 6·8 dm   b) Za 54·8%.   c) 1·03 dm
191. a)  $\alpha = 28^\circ 4'$ ,  $\beta = 61^\circ 56'$ ,  $\gamma = 90^\circ$    b)  $9\pi \text{ cm}^2$    c)  $o = 50 \text{ cm}$ ,  $S = 93\cdot75 \text{ cm}^2$
192. a)  $\frac{25\pi}{12} \text{ cm}^2$    b) 38%   c) 3·2 dm
193. a)  $a = 1\cdot13 \text{ dm}$ ,  $b = 0\cdot87 \text{ dm}$    b)  $43^\circ 46'$    c)  $86^\circ 3'$
194. a)  $28\cdot6 \text{ cm}^2$    b)  $\alpha = \beta = 72^\circ 33'$ ,  $\gamma = 34^\circ 55'$    c) 2·79 cm
195. a)  $151\cdot2 \text{ cm}^2$    b)  $59^\circ 29'$    c) 18·7 cm
196. a)  $o = 149\cdot1 \text{ cm}$ ,  $S = 1218 \text{ cm}^2$    b)  $e = 63\cdot8 \text{ cm}$ ,  $f = 39\cdot8 \text{ cm}$    c)  $106^\circ 8'$
197. a) 3 cm   b)  $96^\circ 19'$    c)  $26\cdot8 \text{ cm}^2$
198. a) 72 cm   b) 17·3%   c) 20·8 cm
199. a) 1·3 m   b) 2·2 m   c) Približno 7 in pol vreč.
200. a)  $100\cdot3 \text{ cm}$    b)  $509\cdot3 \text{ cm}^2$    c) 1·91 m
201. a)  $154\cdot71 \text{ cm}^2$    b)  $v_b = 11\cdot05 \text{ cm}$ ,  $\beta = 100^\circ 48'$    c) 2·95-krat
202. a)  $2\cdot57 \text{ m}^2$    b)  $e = 3\cdot76 \text{ m}$ ,  $f = 1\cdot37 \text{ m}$    c)  $0\cdot22 \text{ m}^2$
203. a) 19·21 cm   b)  $5\cdot25 \text{ cm}$    c)  $17^\circ 47'$
204. a) 24 cm   b)  $24 \text{ cm}^2$    c)  $11\cdot2 \text{ cm}^2$
205. a) 15·7 cm   b)  $o = 44\cdot12 \text{ cm}$ ,  $S = 114\cdot2 \text{ cm}^2$    c) 8·1 cm
206. a)  $3000 \text{ cm}^3$    b)  $200 \text{ cm}^3$    c)  $1040000 \text{ cm}^3$    d)  $0\cdot75 \text{ cm}^3$    e)  $15000 \text{ cm}^3$   
f)  $500 \text{ cm}^3$    g)  $40 \text{ cm}^3$    h)  $10000 \text{ cm}^3$    i)  $2000 \text{ cm}^3$    j)  $300 \text{ cm}^3$   
k)  $130 \text{ cm}^3$    l)  $0\cdot24 \text{ cm}^3$