

Roman Brilej

alfa

Linearna funkcija

Zbirka nalog za matematiko v
srednjem strokovnem izobraževanju

Ljubljana 2014

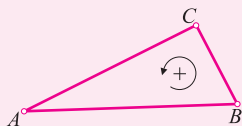
Kazalo

Linearna funkcija	5
1. Pravokotni koordinatni sistem v ravnini	6
2. Razdalja med dvema točkama	23
3. Ploščina in orientacija trikotnika	33
4. Realna funkcija	44
5. Linearna funkcija	48
6. Linearna enačba	64
7. Linearna neenačba	70
8. Enačba premice	75
9. Sistem dveh linearnih enačb	93
10. Sistem treh linearnih enačb	109
11. Naloge za ponavljanje	114
Rešitve	117

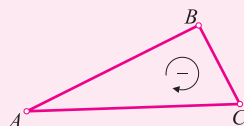
3. Ploščina in orientacija trikotnika

Trikotnik ABC je **pozitivno orientiran**, če si sledijo oglišča A , B in C v nasprotni smeri gibanja urnega kazalca. Če si oglišča sledijo v smeri gibanja urnega kazalca, je trikotnik **negativno orientiran**.

pozitivno orientiran trikotnik



negativno orientiran trikotnik



Ploščina S trikotnika z oglišči $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, x_3)$ je:

$$S = \frac{1}{2}|D|, \quad D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = ((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))$$

Izrazu D pravimo determinanta. Trikotnik je pozitivno orientiran natanko takrat, ko je $D > 0$ in negativno orientiran, ko je $D < 0$. Če je $D = 0$, ležijo točke na isti premici (so **kolinearne**).

Zgledi

1. Izračunaj determinanto $\begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix}$.

Rešitev: Determinanto računamo po pravilu:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Tako imamo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix} &= (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{3}(1 - \sqrt{3}) = \\ &= 1^2 - (\sqrt{2})^2 - \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = \\ &= 1 - 2 - \sqrt{3} + 3 = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Določi tak x , da bo determinanta $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 - x & 3 \end{vmatrix}$ enaka 0.

Rešitev: Zapišimo ustrezno enačbo in jo rešimo:

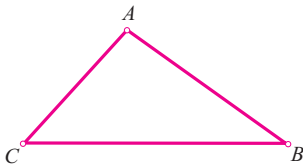
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 - x & 3 \end{vmatrix} &= 0 \\ 3x - 2(1 - x) &= 0 \\ 3x - 2 + 2x &= 0 \\ 5x &= 2 \quad / : 5 \\ x &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

3. Reši enačbo $\begin{vmatrix} x+1 & x+3 \\ x-2 & x-4 \end{vmatrix} = 4$.

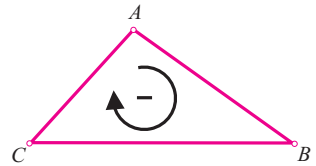
Rešitev: Upoštevajmo definicijo determinante in rešimo enačbo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x+1 & x+3 \\ x-2 & x-4 \end{vmatrix} &= 4 \\ (x+1)(x-4) - (x-2)(x+3) &= 4 \\ x^2 - 3x - 4 - x^2 - x + 6 &= 4 \\ -4x + 2 &= 4 \\ -4x &= 2 \quad / : (-4) \\ x &= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. Kakšna je orientacija trikotnika ABC na sliki?



Rešitev: Označitev oglišč teče od A do C v smeri urnega kazalca, kar pomeni, da je trikotnik negativno orientiran.



5. Izračunaj ploščino trikotnika ABC z oglišči $A(3, -2)$, $B(4, 1)$, $C(-2, 5)$ in določi njegovo orientacijo.

Rešitev: Ploščina S trikotnika z oglišči $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$ je enaka:

$$S = \frac{1}{2}|D|$$

kjer je D determinanta:

$$D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Najprej izračunjamo:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 - 3 & 1 - (-2) \\ -2 - 3 & 5 - (-2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-5) \cdot 3 = 22 \end{aligned}$$

Ploščina trikotnika je tako:

$$S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2} \cdot |22| = 11$$

Poiščimo še takšen n , da bo veljalo $f(n) = n - 1$. Vrednost funkcije f je pri vseh enomestnih številih enaka 1, pri vseh dvomestnih 2, itd. Vrednosti $n - 1$ so zato že pri dvomestnih številih prevelike, da bi veljalo $f(n) = n - 1$, saj je že pri 10:

$$f(10) = 2 \quad \text{in} \quad 10 - 1 = 9$$

Torej pridejo v poštev samo enomestna števila. Za ta je, kot smo že dejali, $f(n) = 1$. Torej imamo enačbo:

$$1 = n - 1$$

Od tod je $n = 2$.

Naloge

78. Zapiši predpis za funkcijo f , ki:

- realnemu številu x priredi njegov trikratnik
- naravnemu številu n priredi za 5 manjše število
- realnemu številu, ki predstavlja polmer kroga, priredi obseg tega kroga
- realnemu številu P , ki predstavlja površino kocke, priredi dolžino roba te kocke

79. Zapiši predpis za funkcijo f , ki vsakemu realnemu številu priredi:

- njegovo nasprotno število
- njegov dvakratnik
- za 2 povečano njegovo vrednost
- za 3 zmanjšano njegovo vrednost
- njegovo polovično vrednost
- njegov kvadrat
- za 5 povečan njegov kub
- petkratnik njegovega kvadrata

80. Dopolni tabelo za funkcijo $f(x) =$:

a) $x + 2$

x	$f(x)$
-6	
-4	
0	
1	
7	

b) $3 - x$

x	$f(x)$
-3	
-2	
1	
3	
5	

c) $2x - 1$

x	$f(x)$
-4	
-1	
0	
1	
4	

d) $-\frac{1}{2}x + 3$

x	$f(x)$
-4	
-2	
0	
2	
4	

e) x^2

x	$f(x)$
0	
1	
2	
3	
4	
5	

f) $x^3 + 2$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
3	

g) $\frac{x}{x+1}$

x	$f(x)$
-3	
-2	
0	
1	
4	

h) $1 - x^{-1}$

x	$f(x)$
-2	
-1	
1	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}$	

i) $ x + 1$	j) $x - x $	k) $ 1 - x + 1$	l) $ 2 - x ^{-1}$																																																
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">x</th><th style="padding: 2px 5px;">$f(x)$</th></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-7</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-6</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-3</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> </table>	x	$f(x)$	-7		-6		-3		0		1		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">x</th><th style="padding: 2px 5px;">$f(x)$</th></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-5</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-2</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> </table>	x	$f(x)$	-5		-2		0		3		6		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">x</th><th style="padding: 2px 5px;">$f(x)$</th></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-4</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-2</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> </table>	x	$f(x)$	-4		-2		1		2		3		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">x</th><th style="padding: 2px 5px;">$f(x)$</th></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">-2</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">$-\frac{1}{2}$</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">$\frac{2}{3}$</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> </table>	x	$f(x)$	-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1		2	
x	$f(x)$																																																		
-7																																																			
-6																																																			
-3																																																			
0																																																			
1																																																			
x	$f(x)$																																																		
-5																																																			
-2																																																			
0																																																			
3																																																			
6																																																			
x	$f(x)$																																																		
-4																																																			
-2																																																			
1																																																			
2																																																			
3																																																			
x	$f(x)$																																																		
-2																																																			
$-\frac{1}{2}$																																																			
$\frac{2}{3}$																																																			
1																																																			
2																																																			

81. Tabeliraj funkcijo f od -3 do 3 s korakom 1 :

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|---------------------|
| a) $f(x) = 3x + 1$ | b) $f(x) = 4 - 2x$ | c) $f(x) = 3$ |
| d) $f(x) = x $ | e) $f(x) = x^2 - 3$ | f) $f(x) = 1 - x^3$ |
| g) $f(x) = \frac{x+1}{x+4}$ | h) $f(x) = x^{-1} + x^{-2}$ | |

82. Za funkcijo $f(x) = 2x^2 - 3$ izračunaj:

- | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------------------------|
| a) $f(1)$ | b) $f(-3)$ | c) $f(0) + f(2)$ |
| d) $f(-1) - f(1)$ | e) $2f(3) - 3f(2)$ | f) $f(\sqrt{2}) + f(\frac{1}{2})$ |

83. Izračunaj $f(0) + f(2)$, če je $f(x) =$:

- | | | | |
|--------------|----------------------|-----------------------|---------------------------------------|
| a) $3x + 4$ | b) $2 - x$ | c) $\frac{1}{2}x + 5$ | d) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ |
| e) $1 + x^4$ | f) $\frac{x-1}{x+1}$ | g) $ 1-x ^{-1}$ | h) $\left(3 + \frac{1}{x-1}\right)^2$ |

84. Dana je množica $A = \{-1, 0, 1\}$. Zapiši zalogo vrednosti Z_f funkcije $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) =$:

- | | | | |
|------------|-----------------|--------------|--------------|
| a) $x + 1$ | b) $2x - 1$ | c) x^2 | d) 2^x |
| e) $ x $ | f) $\sqrt{x+1}$ | g) 3^{x^4} | h) $x^3 - x$ |

85. Funkcija g priredi vsakemu naravnemu številu število mest v njegovem desetiškem zapisu.

- | | |
|--|---|
| a) Izračunaj $g(8)$, $g(49)$ in $g(2^{10})$. | b) Določi zalogo vrednosti funkcije g . |
| c) Katero število se preslika samo vase? | |

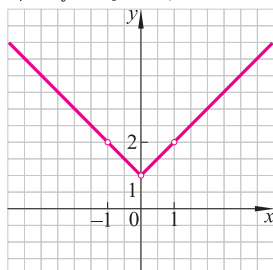
86. Funkcija f priredi vsakemu naravnemu številu, ki je manjše od 50 , število $\sqrt{2}$, če je sodo, in $\sqrt{3}$, če je liho.

- | | |
|---|---|
| a) Izračunaj $f(17)$, $f(20)$ in $f(49)$. | b) Določi zalogo vrednosti funkcije f . |
| c) Zapiši predpis za funkcijo f . | |

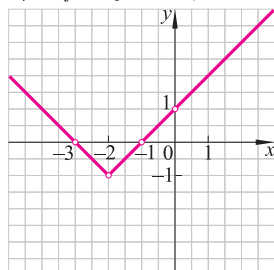
*87. Funkcija r vsako realno število zaokroži na dve decimalki.

- | | |
|--|---|
| a) Izračunaj $r(\sqrt{2})$, $r(\frac{1}{3})$, $r(4)$. | b) Določi zalogo vrednosti funkcije r . |
| c) Katera števila se preslikajo v $2 \cdot 13$? | |
| d) Kakšna zveza velja za števili a in b , za kateri je $r(a) = r(b)$? | |

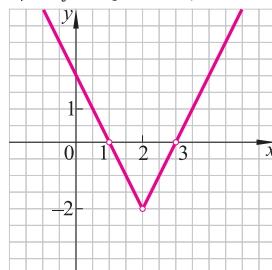
122. a) $Z_f = [1, \infty)$



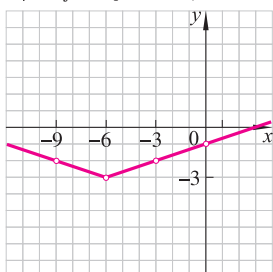
b) $Z_f = [-1, \infty)$



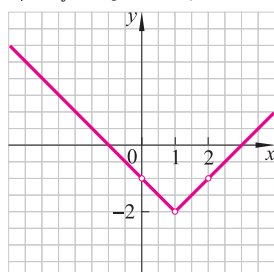
c) $Z_f = [-2, \infty)$



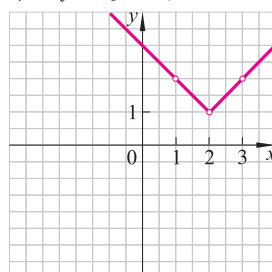
d) $Z_f = [-3, \infty)$



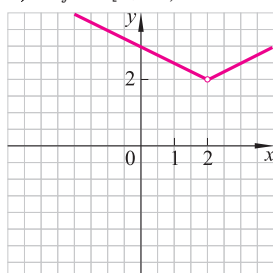
e) $Z_f = [-2, \infty)$



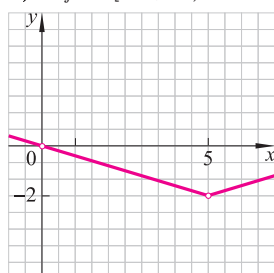
f) $Z_f = [1, \infty)$



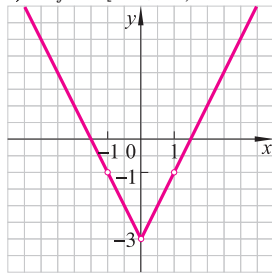
g) $Z_f = [2, \infty)$



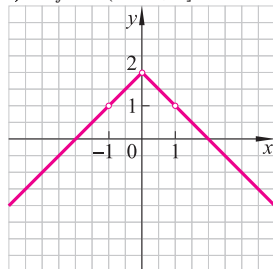
h) $Z_f = [-2, \infty)$



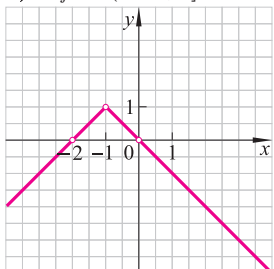
i) $Z_f = [-3, \infty)$



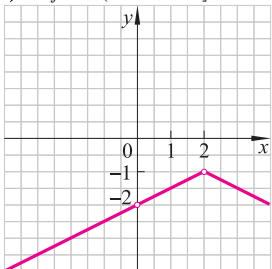
j) $Z_f = (-\infty, 2]$



k) $Z_f = (-\infty, 1]$



l) $Z_f = (-\infty, -1]$



123. a) Ne. b) Da. c) Da. d) Da. e) Ne. f) Ne. g) Da. h) Da.

124. a) $x = 4$ b) $x = -2$ c) $x = 4$ d) $x = -3$ e) Je ni. f) $x = -\frac{3}{2}$
 g) $x = -\frac{2}{3}$ h) $x = -12$ i) $x = 10$ j) Je ni. k) $x = \frac{4}{9}$ l) $x = -\frac{100}{99}$

125. a) $M(2, 0)$ b) $M(-4, 0)$ c) $M(-4, 0)$ d) Je ne seka. e) $M(\frac{5}{4}, 0)$
 f) $M(-50, 0)$ g) $M(\frac{7}{8}, 0)$ h) $M(\sqrt{2}, 0)$