

Roman Brilej, Dezider Ivanec

alfa

Zaporedja
Diferencialni račun

Zbirka nalog za matematiko v
srednjem strokovnem izobraževanju

Ljubljana 2012

Kazalo

1	Zaporedja	5
1.1	Definicija in lastnosti zaporedij	6
1.2	Aritmetično zaporedje	14
1.3	Vsota n členov aritmetičnega zaporedja	25
1.4	Geometrijsko zaporedje	32
1.5	Vsota n členov geometrijskega zaporedja	42
1.6	Obrestni račun	48
1.7	Naloge za ponavljanje	63
2	Diferencialni račun	65
2.1	Zveznost	66
2.2	Operacije v množici funkcij	73
2.3	Limita funkcije	78
2.4	Naklon premice	84
2.5	Definicija odvoda	93
2.6	Pravila za odvajanje	98
2.7	Odvod sestavljene funkcije	110
2.8	Odvodi nekaterih elementarnih funkcij	117
2.9	Naraščanje in padanje funkcij. Ekstremi	124
2.10	Naloge za ponavljanje	142
	Rešitve	145

2.2 Operacije v množici funkcij

Za poljubni realni funkciji f in g lahko na skupnem definicijskem območju definiramo naslednje operacije:

- **vsota** funkcij $f + g$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- **razlika** funkcij $f - g$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

- **produkt** funkcij fg

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad g(x) \neq 0$$

- **količnik** funkcij $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- **sestava** ali **kompozitum** funkcij $f \circ g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Količnik funkcij $\frac{f}{g}$ je definiran povsod tam, kjer je funkcija g različna od 0, kompozitum $f \circ g$ pa na preseku zaloge vrednosti funkcije g in definicijskega območja funkcije f .

Funkcijo i , ki vsak element preslika v samega sebe, imenujemo **identiteta**. Če je $f : A \rightarrow B$ bijektivna funkcija, obstaja takšna funkcija $f^{-1} : B \rightarrow A$, da velja:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i$$

Funkcijo f^{-1} imenujemo **inverzna funkcija** funkcije f .

Zgledi

1. Dani sta funkciji $f(x) = 3x + 1$ in $g(x) = x - 5$. Zapiši predpis za funkcijo $h = f + g$.

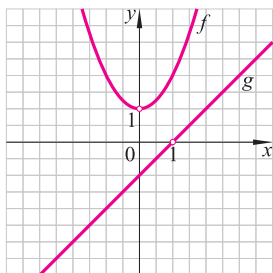
Rešitev: Vsota $f + g$ funkcij f in g je za vsak x , kjer sta definirani obe funkciji f in g , definirana kot:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Tako je v našem primeru:

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 1 + x - 5 = 4x - 4$$

2. Na sliki sta grafa funkcij f in g . Izračunaj $(fg)(1)$ in $(3f + 2g)(0)$.



Rešitev: Podobno kot vsota je definiran tudi produkt funkcij:

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

S slike lahko preberemo, da je $f(1) = 2$ in $g(1) = 0$. Tako lahko izračunamo:

$$(fg)(1) = f(1)g(1) = 2 \cdot 0 = 0$$

Za izračun druge vrednosti potrebujemo $f(0)$ in $g(0)$. S slike preberemo:

$$f(0) = 1 \quad \text{in} \quad g(0) = -1$$

Tako imamo:

$$(3f + 2g)(0) = 3f(0) + 2g(0) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1$$

3. Dani sta funkciji $f(x) = \sqrt{x}$ in $g(x) = x + \sqrt{x}$. Zapiši predpis in določi definicijsko območje funkcije $h = f - g$.

Rešitev: Funkcijo h zapišemo kot:

$$h(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x + \sqrt{x}) = -x$$

Zgornji zapis velja za vsak x , kjer sta definirani funkciji f in g . Ker v obeh funkcijah nastopa \sqrt{x} , ki je definiran zgolj za $x \geq 0$, lahko ugotovimo, da sta obe funkciji f in g definirani na intervalu $[0, \infty)$, s tem pa je to tudi definicijsko območje funkcije $h = f - g$:

$$D_h = [0, \infty)$$

Pripomnimo, da je sicer definicijsko območje funkcije $x \mapsto -x$ kar celotna množica realnih števil, saj je le-to linearna funkcija.

4. Dani sta funkciji $f(x) = \log_2(x - 3)$ in $g(x) = 3^x - 81$. Zapiši predpis za funkcijo $\frac{f}{g}$ in ji določi definicijsko območje.

Rešitev: Količnik funkcij f in g je za vsak x , kjer sta definirani funkciji f in g ter je $g(x) \neq 0$, enak:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log_2(x - 3)}{3^x - 81}$$

Določimo presečišče obeh simetral. Obe enačbi imamo dani v eksplicitni obliki, zato lahko izenačimo y -a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}x + \frac{11}{7} &= -2x + 8 \quad / \cdot 7 \\ x + 11 &= -14x + 56 \\ 15x &= 45 \quad / : 15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Izračunajmo še y :

$$y = -2x + 8 = -2 \cdot 3 + 8 = 2$$

Torej je presečišče simetral s_{AB} in s_{AC} točka $S(3, 2)$ in je središče trikotniku ABC očrtane krožnice.

Naloge

171. Določi naklonski kot premice:

- | | | |
|-------------------------------|---------------------|--|
| a) $y = x + 5$ | b) $y = -x + 1$ | c) $y = 3$ |
| d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ | e) $y = -2x + 5$ | f) $x = 1$ |
| g) $y = \frac{2}{3}x - 1$ | h) $y = -\sqrt{2}x$ | i) $y = \frac{5}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| j) $y = \pi x - \pi^2$ | k) $x = 0$ | l) $y = 0$ |

172. Določi naklonski kot premice:

- | | | |
|----------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $3x + 2y - 1 = 0$ | b) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ | c) $x - 5y = 0$ |
| d) $7x - 3y + 8 = 0$ | e) $-x + \frac{y}{2} = 1$ | f) $2x + \frac{y}{5} = 1$ |
| g) $9x + 2y + 4 = 0$ | h) $-\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1$ | i) $\sqrt{3}x + y + \sqrt{2} = 0$ |
| j) $4x + 4y - 3 = 0$ | k) $\frac{x}{8} + \frac{5y}{3} = 1$ | l) $-\frac{4x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ |

173. Določi naklonski kot premice, ki poteka skozi točki A in B :

- | | |
|---|-------------------------------------|
| a) $A(1, 2), B(3, 3)$ | b) $A(5, 4), B(3, 8)$ |
| c) $A(-4, -3), B(5, 6)$ | d) $A(-2, 7), B(4, 7)$ |
| e) $A(0, 6), B(4, -1)$ | f) $A(1, 5), B(1, -3)$ |
| g) $A(2\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 1)$ | h) $A(0, -2), B(6, 0)$ |
| i) $A(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3}), B(\sqrt{3}, \sqrt{3} + 4)$ | j) $A(3, 7), B(-1, 0)$ |
| k) $A(4, 7), B(-4, 1)$ | l) $A(\pi, \pi^2), B(\pi^3, \pi^4)$ |

174. Določi enačbo premice, ki poteka skozi točko T in ima naklonski kot φ :

- | | | |
|---|---|--|
| a) $T(1, 4), \varphi = 0^\circ$ | b) $T(0, -2), \varphi = 30^\circ$ | c) $T(-3, 4), \varphi = 45^\circ$ |
| d) $T(\sqrt{3}, 0), \varphi = 60^\circ$ | e) $T(-2, 7), \varphi = 90^\circ$ | f) $T(\frac{1}{2}, \sqrt{3}), \varphi = 120^\circ$ |
| g) $T(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \varphi = 135^\circ$ | h) $T(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}), \varphi = 30^\circ$ | |

175. Določi enačbo premice, ki poteka skozi presečišče premic $3x - y + 1 = 0$ in $y = -6x - 2$ in ima naklonski kot 60° .

176. Določi kot med dano premico in abscisno osjo:

- | | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|----------------------|
| a) $y = 3x - 7$ | b) $y = -2x + 5$ | c) $4x - 3y + 5 = 0$ |
| d) $x + y - 6 = 0$ | e) $\frac{x}{5} + \frac{y}{8} = 1$ | f) $x = 4$ |
| g) $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ | h) $x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$ | i) $y = -x + 9$ |
| j) $x = \sqrt{3}$ | k) $\frac{3x}{2} + 3y = 1$ | l) $7x - 2y + 1 = 0$ |

177. Določi kot med dano premico in ordinatno osjo:

- | | | |
|---------------------------|--------------------------------|---|
| a) $y = 4x - 1$ | b) $y = -3x + 5$ | c) $5x - 3y + 1 = 0$ |
| d) $x - 8y + 7 = 0$ | e) $3x + 3y - 4 = 0$ | f) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ |
| g) $y = \frac{1}{2}x + 8$ | h) $y = -\sqrt{2}x + \sqrt{3}$ | i) $\sqrt{2}x - \sqrt{6}y + \sqrt{3} = 0$ |
| j) $-x - \frac{y}{7} = 1$ | k) $3x - \frac{y}{2} = 1$ | l) $\frac{x}{5} + \frac{5y}{2} = 1$ |

178. Določi kot med premicama:

- | | |
|--|---|
| a) $y = 4x - 9$ in $y = 5x - 2$ | b) $y = x$ in $y = x + 1$ |
| c) $y = -x + 1$ in $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ | d) $y = -2x + 4$ in $3x + 5y - 1 = 0$ |
| e) $y = \frac{1}{4}x$ in $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$ | f) $y = 6x + 2$ in $y = 0$ |
| g) $7x - 2y + 8 = 0$ in $6x + y - 3 = 0$ | h) $5x + 4y + 6 = 0$ in $2x - 4y + 3 = 0$ |
| i) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ in $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ | j) $-x + 2y = 1$ in $x - \frac{y}{5} = 1$ |
| k) $7x - y + 3 = 0$ in $y = -2$ | l) $9x - 2y + 3 = 0$ in $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ |
| m) $4x + 3y + 6 = 0$ in $3x - 4y + 21 = 0$ | n) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ in $\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 1$ |
| o) $2x + 6y + 7 = 0$ in $\frac{x}{2} - y = 1$ | p) $y = 4x - 2$ in $8x - 2y + 1 = 0$ |
| r) $\sqrt{6}x + 2y - 3 = 0$ in $x - \sqrt{2}y = 0$ | s) $\sqrt{3}x - 2y + 6 = 0$ in $\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{5} = 1$ |
| t) $y = \sqrt{5}x + 1$ in $\sqrt{6}x + y = 0$ | u) $y = \sqrt{3}x + 4$ in $y = -\sqrt{3}x + 11$ |

179. Določi kot med premicama:

- | | |
|--|--|
| a) $y = x + 5$ in $x = 3$ | b) $3x - y + 6 = 0$ in $x = 5$ |
| c) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ in $x = -1$ | d) $y = 4$ in $x = 0$ |
| e) $y = -\sqrt{3}x + 5$ in $x = \frac{4}{3}$ | f) $4x - 9y + 5 = 0$ in $x = -4 \cdot 3$ |

180. Ali sta dani premici pravokotni:

- | | |
|---|--|
| a) $y = 3x + 5$ in $y = -3x - 5$ | b) $y = 4x$ in $y = -\frac{1}{4}x + 4$ |
| c) $5x + y - 1 = 0$ in $x - 5y + 2 = 0$ | d) $3x + 7y = 0$ in $7x + 3y - 8 = 0$ |
| e) $\frac{x}{2} - y = 1$ in $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$ | f) $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ in $-\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ |

80. 0, 3, 6, 12; 15, 3, -9, 27
81. a) 765 b) $\frac{255}{256}$ c) 6 560 d) $\frac{1640}{27}$ e) 56 f) $-\frac{157\,625}{32}$ g) $\frac{1\,261}{144}$
h) 390 624 i) 425 j) -16 k) 0 l) 39 321
82. a) $a_{20} = 9, s_{20} = 180$ b) $a_{10} = -5\,120, s_{10} = -3\,410$ c) $n = 7, s_7 = \frac{5\,465}{9}$
d) $n = 11, s_{11} = 265\,722$ e) $a_1 = -2, s_6 = -7\,812$ f) $a_1 = 5\,103, s_5 = 3\,465$
g) $a_1 = \frac{5}{8}, a_4 = 40$ h) $a_1 = 3\,584, a_8 = 61\,236$ i) $q = 6, s_6 = \frac{9\,331}{18}$
j) $q = -\frac{4}{3}, s_7 = \frac{13\,265}{27}$ k) $a_1 = 2, s_{10} = 62 + 62\sqrt{2}$
l) $q = -2\sqrt{3}, s_8 = 7\,540 - 15\,080\sqrt{3}$ m) $a_1 = 2, a_6 = 486$
n) $a_1 = 3, a_{10} = 48\sqrt{2}$ o) $q = 2, n = 8$ p) $q = 0\,75, n = 4$
83. a) 4 372 b) 3 069 c) $\frac{134\,197}{27}$ d) $189 + 93\sqrt{2}$
84. 11
85. 9
86. a) 8 b) 19 c) 31
87. a) $x = 262\,144$ b) $x = 118\,098$ c) $x = 48\sqrt{2}$
88. 72
89. a) $a_1 = 5$ b) $a_1 = 3$ c) $a_1 = -1$
90. $a_1 = 9, q = -4$
91. 6
92. 2 016 m
93. 5525'63 EUR
94. a) 12 000 EUR b) 16 000 EUR c) 15 000 EUR d) 9 600 EUR e) 13 800 EUR
95. a) 4 240 EUR b) 4 480 EUR c) 4 600 EUR d) 4 960 EUR e) 5 200 EUR
96. a) 15 % b) 10 % c) 7.5 % d) 6 % e) 4.29 %
97. a) V 15 letih. b) V 12 letih. c) V 10 letih. d) V 5 letih. e) V 4.3 leta.
98. a) 1 000 EUR b) 300 EUR c) 600 EUR d) 800 EUR e) 857'14 EUR
99. a) 4'38 USD b) 6'58 USD c) 39'45 USD d) 43'84 USD
100. 30'25 EUR 101. 1 030'90 EUR 102. 71'07 EUR 103. 523 %
104. a) 6 300 USD b) 6 615 USD c) 7 657'69 USD d) 9 773'37 USD
105. a) 100 146'07 EUR b) 135 420'02 EUR c) 64 970'60 EUR d) 91 828'46 EUR
e) 74 203'93 EUR
106. a) 5 % b) 4 % c) 4.77 % d) 6.55 %
107. a) 2 leti. b) 4 leta. c) 21 let. d) 61 let.
108. a) 300 000 EUR b) 2 000 EUR c) 3 760 USD d) 747 258 EUR
109. a) 10'05 USD b) 30'76 USD c) 134'87 USD d) 306'11 USD
110. a) 1 801'86 EUR b) 1 910'48 EUR c) 1 888'33 EUR d) 1 921'64 EUR