

Roman Brilej

OMEGA 1

Linearna funkcija, geometrija v ravnini

Zbirka nalog za matematiko v 1. letniku
gimnazijskega izobraževanja

Ljubljana 2014

Kazalo

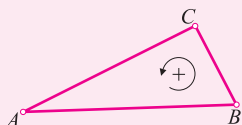
| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Linearna funkcija | 5 |
| 1.1 | Pravokotni koordinatni sistem v ravnini | 6 |
| 1.2 | Razdalja med dvema točkama | 12 |
| 1.3 | Ploščina in orientacija trikotnika | 15 |
| 1.4 | Realna funkcija | 18 |
| 1.5 | Graf realne funkcije realne spremenljivke | 23 |
| 1.6 | Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost | 27 |
| 1.7 | Linearna funkcija | 32 |
| 1.8 | Linearna enačba | 39 |
| 1.9 | Linearna neenačba | 42 |
| 1.10 | Enačba premice | 45 |
| 1.11 | Sistem dveh linearnih enačb | 52 |
| 1.12 | Sistem treh linearnih enačb | 57 |
| 1.13 | Naloge za ponavljanje | 61 |
| 2 | Geometrija v ravnini | 65 |
| 2.1 | Osnovni pojmi | 66 |
| 2.2 | Skladnost in merjenje kotov | 74 |
| 2.3 | Preslikave v ravnini | 80 |
| 2.4 | Trikotnik | 89 |
| 2.5 | Krog in krožnica | 92 |
| 2.6 | Štirikotnik in pravilni n -kotnik | 96 |
| 2.7 | Podobnost | 101 |
| 2.8 | Naloge za ponavljanje | 107 |
| | Rešitve | 109 |

Z zvezdico (*) so označene zahtevnejše naloge.

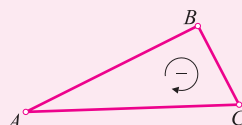
1.3 Ploščina in orientacija trikotnika

Trikotnik ABC je **pozitivno orientiran**, če si sledijo oglišča A , B in C v nasprotni smeri gibanja urnega kazalca. Če si oglišča sledijo v smeri gibanja urnega kazalca, je trikotnik **negativno orientiran**.

pozitivno orientiran trikotnik



negativno orientiran trikotnik



Ploščina S trikotnika z oglišči $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$ je:

$$S = \frac{1}{2}|D|, \quad D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = ((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))$$

Izrazu D pravimo determinanta. Trikotnik je pozitivno orientiran natanko takrat, ko je $D > 0$ in negativno orientiran, ko je $D < 0$. Če je $D = 0$, ležijo točke na isti premici (so **kolinearne**).

65. Izračunaj determinanto:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \text{e)} \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 14 & 7 \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 3 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} & \text{g)} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix} & \\ \text{h)} \begin{vmatrix} a - b & a + 1 \\ a - 1 & a + b \end{vmatrix} & & & \end{array}$$

66. Poišči tak x , da bo determinanta enaka 0:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ x & 4 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & x - 1 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} & \\ \text{d)} \begin{vmatrix} x & 4 \\ x + 2 & 12 \end{vmatrix} & \text{e)} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 - 2x & 2 + x \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 2x + 1 & 3 - x \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \\ \text{g)} \begin{vmatrix} x + 1 & 8 \\ 1 & x - 1 \end{vmatrix} & \text{h)} \begin{vmatrix} x + 2 & x - 2 \\ 2x + 1 & x - 1 \end{vmatrix} & & \end{array}$$

67. Reši enačbo:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & 2 \\ -x & 3 \end{vmatrix} = -10 \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} x + 1 & x - 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} x+2 & x-1 \\ x+1 & x-3 \end{vmatrix} = 2$$

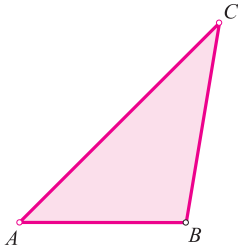
$$\text{d) } \begin{vmatrix} x-3 & x \\ x-1 & x+2 \end{vmatrix} = -6$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 2x-1 & 3-x \\ 2x+1 & 1-x \end{vmatrix} = -6$$

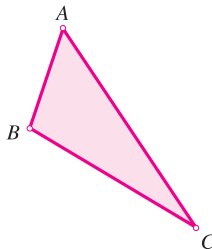
$$\text{f) } \begin{vmatrix} -2 & 2+x \\ x-4 & 3x \end{vmatrix} = 12$$

68. Kakšna je orientacija trikotnika ABC na sliki?

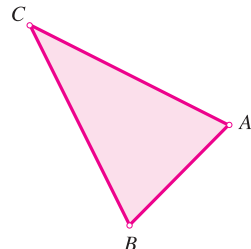
a)



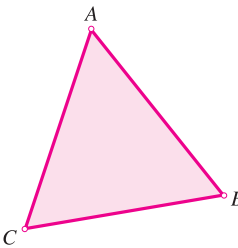
b)



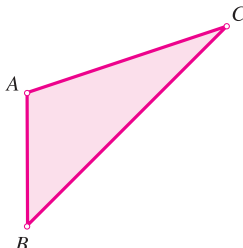
c)



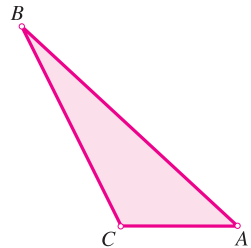
d)



e)



f)



69. Izračunaj ploščino trikotnika ABC in določi njegovo orientacijo:

a) $A(2, -1), B(3, 2), C(-1, 4)$

b) $A(-1, 0), B(4, -3), C(-2, 1)$

c) $A(-5, 1), B(6, 2), C(-1, -3)$

d) $A(2, 4), B(-1, -3), C(0, 5)$

e) $A(-2, -3), B(1, 0), C(4, 3)$

f) $A(4, 6), B(3, -2), C(5, -4)$

g) $A(1, 5), B(3, 9), C(-3, -3)$

h) $A(-4, 2), B(3, -3), C(4, 3)$

i) $A(6, -2), B(3, 9), C(-1, -7)$

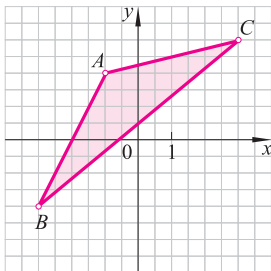
j) $A(-2, 6), B(-1, 5), C(7, -3)$

k) $A(-7, -2), B(4, 5), C(2, -6)$

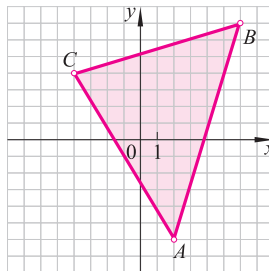
l) $A(1, \sqrt{2}), B(\sqrt{2}, -2), C(1+\sqrt{2}, -1)$

70. Izračunaj ploščino trikotnika ABC na sliki in določi njegovo orientacijo (neposredno s slike in računsko):

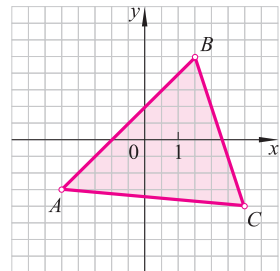
a)



b)

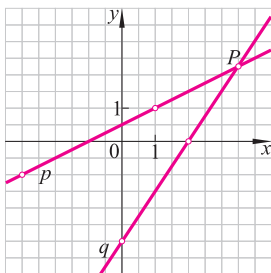


c)



1.13 Naloge za ponavljanje

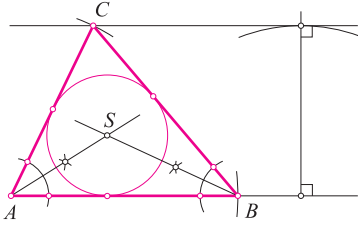
- 304.** Dan je trikotnik z oglišči $A(-3, 1)$, $B(1, -2)$, $C(3, 4)$.
- Nariši trikotnik ABC , izračunaj njegovo ploščino in določi orientacijo trikotnika.
 - Katero izmed oglišč leži na premici $y = -2x + 10$?
 - Zapiši odsekovno obliko enačbe nosilke stranice BC .
- 305.** Množica točk M je določena s pogojevma $(x > 1)$ in $(y \leq -2)$.
- Nariši dano množico točk.
 - Katera izmed točk: $A(-4, 1)$, $B(3, -1)$, $C(2\sqrt{7}, -3\sqrt{8})$, $D(\sqrt{2}, -\sqrt{5})$, $E(1, -4)$, $F(\frac{7}{5}, -\frac{8}{4})$ leži v množici M ?
 - Za katere x bodo točke premice $y = -x + 4$ ležale v množici M ?
- 306.** Premice $y = 3x$, $2x - 5y - 13 = 0$ in $4x + 3y - 13 = 0$ določajo pozitivno orientiran trikotnik ABC . Oglišče A ima izmed vseh oglišč najmanjšo ordinato.
- Izračunaj koordinate oglišč trikotnika ABC . Premice in trikotnik tudi nariši.
 - Koliko enot meri najdaljša stranica trikotnika ABC ?
 - Koliko odstotkov trikotnika leži nad abscisno osjo?
- 307.** Dani sta premici $\frac{y}{2} - \frac{x}{3} = 1$ in $y = 2x - 2$.
- Obe premici nariši in izračunaj koordinati njunega presečišča.
 - Zapiši eksplicitno obliko enačbe premice, ki gre skozi presečišče danih premic in odseka na abscisni osi odsek -17 .
 - Izračunaj ploščino štirikotnika, ki ga dani premici oklepata s pozitivnima poltrakoma koordinatnih osi.
- 308.** Štirikotnik ima oglišča $A(-3, -3)$, $B(2, -1)$, $C(3, 1)$ in $D(-2, -1)$.
- Štirikotnik nariši in izračunaj dolžini obeh diagonal.
 - Zapiši eksplicitno obliko enačb nosilk diagonal.
 - Računsko pokaži, da je dani štirikotnik paralelogram.
- 309.** Na sliki sta premici p in q , ki se sekata v točki P .



- Zapiši implicitno obliko njunih enačb.
- Izračunaj koordinati presečišča.
- V katerih točkah seka premica p koordinatni osi?

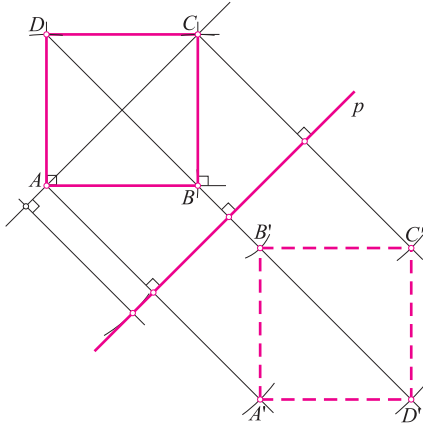
- 310.** Premica p odreže od koordinatnih osi odseka $m = -2$ (na abscisni osi) in $n = 1$ (na ordinatni osi).
- Premico nariši in zapiši implicitno obliko njene enačbe.
 - Zapiši odsekovno obliko enačbe premice q , ki je vzporedna s premico p in gre skozi točko $T(3, 1)$. V isti koordinatni sistem nariši tudi premico q .
 - Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga premica q oklepa s koordinatima osema.
- 311.** Naj bo A množica vseh naravnih števil, ki niso večja od 10. Funkcija f priredi vsakemu številu iz te množice največji skupni delitelj tega števila in števila 40.
- Izračunaj $f(2)$, $f(5)$, $f(6)$.
 - Določi zalogo vrednosti funkcije f in ugotovi, ali je funkcija $f : A \rightarrow A$ bijektivna.
- *c) Poišči tako najmanjše naravno število, da ga bi v nalogi zamenjal s številom 40 in bi bila potem funkcija f injektivna.
- 312.** Dani sta linearni funkciji $f(x) = -2x + 3$ in $g(x) = -\frac{2}{3}x - 1$.
- V isti koordinatni sistem nariši grafa obeh funkcij in izračunaj koordinati njunega presečišča.
 - Za katere vrednosti x je vrednost funkcije f večja od vrednosti funkcije g ?
 - Pri katerem x ima funkcija f za 2 manjšo vrednost od funkcije g ?
- *313.** Dana je družina linearnih funkcij $f(x) = (a - 1)x + a + 1$.
- Določi tisto funkcijo iz dane družine, ki ima pri $x = -3$ vrednost 8.
 - Izračunaj ničlo funkcije za $a = \frac{3}{2}$.
 - Za katere a je vrednost funkcije za vsak x pozitivna?
- 314.** Dana je funkcija $f(x) = |x - 1| - |2x + 4|$.
- Nariši njen graf.
 - Za kateri x je $f(x) \geq -3$?
 - Za kateri x je $|f(x)| = 1$?
- 315.** Dan je sistem enačb:
- $$\begin{aligned} ax + 2y + (a + 2)z &= 1 \\ 3x - ay - 2z &= -5 \\ x + (a + 2)y + z &= -5 \end{aligned}$$
- Reši sistem za $a = 0, 1$ in 2 .
 - Za kateri a je rešitev sistema trojica števil x, y, z , od katerih je $y = 0$?
- **c) Za kateri a sistem nima ene same rešitve?
- 316.** Točke $A(4, -3)$, $B(9, 9)$ in $C(-7, 39)$ so oglišča trikotnika.
- Izračunaj njegov obseg.
 - Določi koordinati razpolovišča stranice BC in izračunaj dolžino težiščnice na stranico BC .
 - Zapiši implicitno obliko enačbe premice, ki poteka skozi oglišče C in je vzporedna s stranico AB .

532. a)



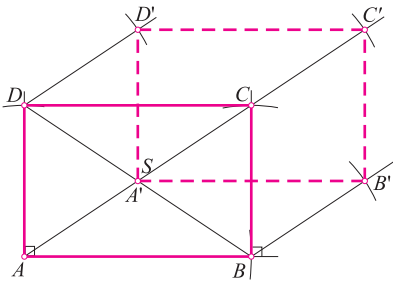
b) 5.9 cm c) γ

533. a)



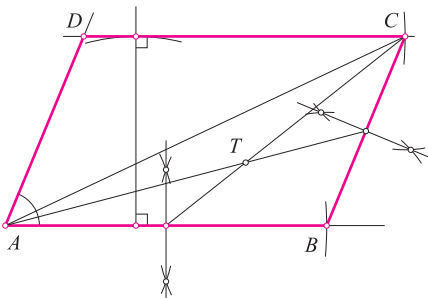
b) 8 cm c) $4\sqrt{6}$ cm

534. a)



b) $2\sqrt{13}$ cm c) $k = \frac{1}{2}$

535. a)



b) $\beta = 112^\circ 5'$, $\gamma = 67^\circ 5'$, $\delta = 112^\circ 5'$

c) $22^\circ 5'$