

Roman Brilej, Dezider Ivanec, Darja Ostruh, Damijan Purg

# OMEGA 2

**Elementarne funkcije, kompleksna števila**

Zbirka nalog za matematiko v 2. letniku  
gimnazijskega izobraževanja

Ljubljana 2013

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Potenčna funkcija</b>	<b>5</b>
1.1	Potenčna funkcija z naravnim eksponentom . . . . .	6
1.2	Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom . . . . .	10
1.3	Korenska funkcija . . . . .	15
1.4	Naloge za ponavljanje . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Kvadratna funkcija</b>	<b>21</b>
2.1	Kvadratna funkcija . . . . .	22
2.2	Kvadratna enačba . . . . .	32
2.3	Kvadratna neenačba . . . . .	41
2.4	Naloge za ponavljanje . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Kompleksna števila</b>	<b>49</b>
3.1	Definicija kompleksnega števila . . . . .	50
3.2	Seštevanje, odštevanje in množenje kompleksnih števil . . . . .	53
3.3	Konjugirano kompleksno število . . . . .	58
3.4	Absolutna vrednost . . . . .	59
3.5	Deljenje kompleksnih števil . . . . .	61
3.6	Kvadratna enačba . . . . .	64
3.7	Naloge za ponavljanje . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Eksponentna in logaritemska funkcija</b>	<b>69</b>
4.1	Eksponentna funkcija . . . . .	70
4.2	Eksponentna enačba . . . . .	74
4.3	Logaritem . . . . .	78
4.4	Logaritemska funkcija . . . . .	82
4.5	Logaritemska enačba . . . . .	85
4.6	Prehod k novi osnovi . . . . .	89
4.7	Uporaba eksponentne in logaritemske funkcije . . . . .	91
4.8	Naloge za ponavljanje . . . . .	93
	<b>Rešitve</b>	<b>95</b>

Z zvezdico (\*) so označene zahtevnejše naloge.

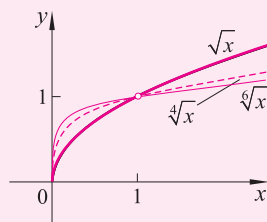
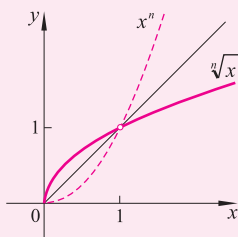
## 1.3 Korenska funkcija

**Korenska funkcija** je realna funkcija oblike:

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad n \in \mathbb{N}, n > 1$$

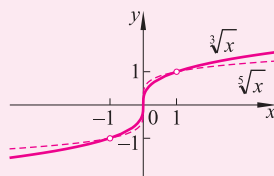
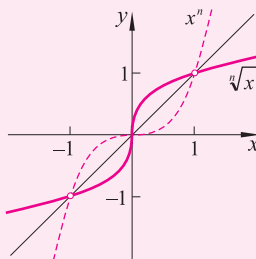
**Korenska funkcija s sodim korenskim eksponentom**

- je inverzna potenčni funkciji  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = x^n$
- definicijsko območje in zaloga vrednosti je množica nenegativnih realnih števil:  $D_f = Z_f = [0, \infty)$
- pri poljubnem korenskem eksponentu poteka graf korenske funkcije skozi točki  $(0, 0)$  in  $(1, 1)$
- je naraščajoča
- je navzdol omejena
- je injektivna
- povsod, razen v  $x = 0$ , je pozitivna



**Korenska funkcija z lihim korenskim eksponentom**

- je inverzna potenčni funkciji  $f(x) = x^n$  na celotni realni osi
- definicijsko območje in zaloga vrednosti je množica vseh realnih števil  $D_f = Z_f = \mathbb{R}$
- pri poljubnem korenskem eksponentu poteka graf korenske funkcije skozi točke  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  in  $(-1, -1)$
- je naraščajoča
- je liha
- je bijektivna
- na intervalu  $(-\infty, 0)$  je negativna, na intervalu  $(0, \infty)$  pa pozitivna



**42.** Dana je funkcija  $f$ . Zapiši enačbo inverzne funkcije  $f^{-1}$  in nariši njen graf:

a)  $f(x) = x^2$ ,  $D_f = [0, \infty)$

b)  $f(x) = x^3$

c)  $f(x) = x^4$ ,  $D_f = [0, \infty)$

d)  $f(x) = x^5$

e)  $f(x) = x^{-1}$

f)  $f(x) = x^{-2}$ ,  $D_f = [0, \infty)$

**43.** Zapiši enačbo inverzne funkcije  $f^{-1}$  k funkciji  $f(x) =$ :

a)  $-\frac{1}{2}x^3$

b)  $x^3 - 1$

c)  $x^5 + 2$

d)  $2x^5 - \frac{1}{2}$

e)  $x^{-1} + 3$

f)  $-x^{-3} + 7$

g)  $(x - 1)^7 + 2$

h)  $2(x + 1)^{-3} - 4$

44. Dana je funkcija  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Zapiši njeno inverzno funkcijo  $f^{-1}$  in določi definicijsko območje funkcije  $f^{-1}$ :

a)  $f(x) = x^2 + 1$     b)  $f(x) = 2x^4$     c)  $f(x) = 4 - x^2$     d)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}$

45. Nariši v isti koordinatni sistem grafa funkcij  $f$  in  $g$ :

a)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x+1}$     b)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x} - 2$   
 c)  $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ,  $g(x) = \sqrt[5]{x+2}$     d)  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ,  $g(x) = \sqrt[4]{x-1}$   
 e)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = -\sqrt[3]{x}$     f)  $f(x) = \sqrt[6]{x}$ ,  $g(x) = 2\sqrt[6]{x}$   
 g)  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ,  $g(x) = -\frac{3}{2}\sqrt[4]{x}$     h)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = 2 - \sqrt{-x}$   
 i)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = 2\sqrt[3]{x+1} - \frac{3}{2}$     j)  $f(x) = \sqrt[7]{x}$ ,  $g(x) = 2\sqrt[7]{2-x} + 1$

46. Nariši v isti koordinatni sistem grafa funkcij  $f$  in  $g$ :

a)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x}$     b)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt[4]{x}$   
 c)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = \sqrt[5]{x}$     d)  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ,  $g(x) = \sqrt[6]{x}$

47. Nariši graf funkcije  $f$ , določi ji definicijsko območje, zalogo vrednosti in njene lastnosti (naraščanje, padanje, lihost, sodost, omejenost):

a)  $f(x) = \sqrt{x} - 2$     b)  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$     c)  $f(x) = 2\sqrt[4]{x-1}$   
 d)  $f(x) = \sqrt[5]{x-1} + 2$     e)  $f(x) = 3 - 2\sqrt{x+2}$     f)  $f(x) = \sqrt[4]{-x} - 2$   
 g)  $f(x) = \sqrt[3]{3-x} + 1$     h)  $f(x) = 2 - 3\sqrt{1-x}$     i)  $f(x) = 1 - \sqrt{2}\sqrt[3]{2-x}$

\*48. Nariši graf funkcije  $f(x) =$ :

a)  $|\sqrt[3]{x} - 1|$     b)  $|\sqrt{x+3} - 2|$     c)  $\sqrt[4]{|x+1|}$   
 d)  $2\sqrt[3]{|1-x|} - 1$     e)  $|\sqrt{|2+x|} - 1|$     f)  $|\sqrt{1-|x|} - 2|$

\*49. Nariši graf funkcije:

a)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}; & x \leq 0 \\ 1 - \sqrt{x}; & x > 0 \end{cases}$     b)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} - 1; & x < 0 \\ 2 + \sqrt[4]{x-1}; & x \geq 1 \end{cases}$   
 c)  $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt[5]{x+2}; & x < -1 \\ 1 - 2\sqrt[3]{x-1}; & x \geq 0 \end{cases}$     d)  $f(x) = \begin{cases} 3\sqrt[4]{2-x}; & x \leq 2 \\ 1 - 2\sqrt{x-1}; & x > 2 \end{cases}$   
 e)  $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt[3]{x+2}; & x \leq -1 \\ -2\sqrt[5]{x} - 1; & -1 < x \leq 1 \\ \sqrt[4]{x-1} - 3; & x > 1 \end{cases}$   
 f)  $f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{|x+2|} - 3; & x \leq -1 \\ 2 - 2\sqrt[4]{x+1}; & -1 < x \leq 0 \\ \sqrt[3]{2-x} + 2; & x \geq 1 \end{cases}$

50. Določi ničle funkcije  $f(x) =$ :

a)  $\sqrt{x-1}$     b)  $\sqrt[3]{x+2} - 3$     c)  $1 + \sqrt[4]{x-5}$   
 d)  $2 + \sqrt[5]{3-7x}$     e)  $\sqrt[6]{3x+1} - 1$     f)  $\sqrt[8]{2-3x} + 2$   
 g)  $\sqrt[3]{|x-3|}$     h)  $2 - \sqrt{|x+1|}$     i)  $1 + \sqrt[5]{2|x-1|} + 1$   
 j)  $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$     k)  $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-1}$     l)  $2\sqrt{x+1} - \sqrt{5x+1}$

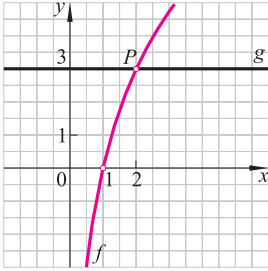
- \*255.** Za katere  $a$  je funkcija za vsak  $x$  negativna?
- a)  $f(x) = -2x^2 + (a + 3)x - 2a$       b)  $f(x) = ax^2 - 3x + a$   
 c)  $f(x) = ax^2 - 2(a + 1)x + a + 1$       d)  $f(x) = (a - 3)x^2 - ax + a - 3$   
 e)  $f(x) = -x^2 + ax + a$       f)  $f(x) = (a - 3)x^2 - ax + 3$
- \*\*256.** Določi taka števila  $m$ , da bo za vsak  $x$  veljala neenakost  $\left| \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 - x + 1} \right| < 3$ .
- 257.** Katera realna števila  $x$  so večja od svojih kvadratov?
- 258.** Ploščina katerega kvadrata je številsko večja od njegovega obsega?
- 259.** Površina katere kocke je številsko manjša od vsote njenih robov?
- 260.** Za katere  $k$  imata premica  $y = kx + 6$  in parabola  $y = -x^2 + 2x + 5$  skupni dve različni točki?
- 261.** Za katere  $k$  premica  $y = kx - 5$  in parabola  $y = 2x^2 - 4x + 3$  nimata skupnih točk?
- 262.** Za katere  $a$  je premica  $y = -2x$  sekanta ali tangenta parabole  $y = x^2 + ax + a^2$ ?
- 263.** Za katere  $a$  je premica  $2x + y - 3 = 0$  mimobežnica parabole  $y = (a + 1)x^2 - 2ax + 3a$ ?
- 264.** Določi taka števila  $m$ , da bo produkt rešitev enačbe  $x^2 + 2mx + 4m^2 - 4m + 1 = 0$  pozitivno število.
- \*265.** Določi taka števila  $m$ , da bo vsota rešitev enačbe  $mx^2 - (5 - m^2)x + 6 = 0$  negativno število.
- \*266.** V enačbi  $x^2 - mx + m - 1 = 0$  določi taka števila  $m$ , da bo vsota kvadratov korenov manjša od 5.
- \*\*267.** V enačbi  $x^2 - (m + 2)x + m^2 = 0$  določi taka števila  $m$ , da bo vsota obratnih vrednosti korenov večja od 1.
- \*268.** Določi abscise točk  $T(x, 0)$ , za katere je vsota kvadratov razdalj od točk  $A(0, 2)$  in  $B(3, 4)$  manjša od 29.

## 2.4 Naloge za ponavljanje

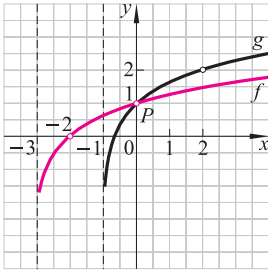
- 269.** Dana je funkcija  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$ .
- a) Nariši njen graf.  
 b) Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti in najmanjšo vrednost funkcije  $f$ .  
 c) Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga določajo presečišča grafa funkcije s koordinatnima osema.

- 270.** Dana je funkcija  $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$ .
- Nariši njen graf.
  - Določi  $D_f$ ,  $Z_f$  in največjo vrednost funkcije  $f$ .
  - Izračunaj obseg trikotnika, ki ga določajo presečišča grafa funkcije s koordinatnima osema.
- 271.** Na grafu kvadratne funkcije  $f$  so točke  $A(0, -3)$ ,  $B(-2, 1)$  in  $C(6, 9)$ .
- Zapiši funkcijo  $f$  v splošni obliki.
  - Funkcijo  $f$  zapiši tudi v razcepni obliki.
  - Zapiši enačbo premice, ki seka graf funkcije  $f$  v točkah  $A$  in  $C$ .
- 272.** Dane so točke  $A(0, 1)$ ,  $B(-2, -5)$  in  $C(2, -1)$ .
- Zapiši enačbo parabole, ki poteka skozi te točke.
  - Enačbo parabole iz prejšnje točke zapiši v temenski obliki.
  - Zapiši enačbo premice, ki seka iskano parabolo v točkah  $A$  in  $B$ .
- 273.** Dana je družina funkcij  $f(x) = x^2 - 4x - a$ .
- Določi tako število  $a$ , da bo vrednost funkcije  $f$  v točki  $x = 3$  enaka  $-8$ . Zapiši to funkcijo v razcepni obliki.
  - Nariši graf funkcije za  $a = 5$ .
  - Določi tisto funkcijo iz dane družine, katere najmanjša vrednost je 0. Zapiši to funkcijo v temenski obliki.
- 274.** Dana je družina parabol  $y = ax^2 - 4x - 6$ ,  $a \neq 0$ .
- Določi tisto parabolo iz družine, ki poteka skozi točko  $A(-2, 10)$ . Zapiši enačbo te parabole v temenski obliki.
  - Nariši parabolo za  $a = 2$ .
  - Določi tako število  $a$ , da bo parabola imela teme na osi  $x$ . Zapiši koordinati temena.
- 275.** V družini parabol  $y = 2x^2 + ax + a$  določi tisto parabolo, ki
- vsebuje točko  $A(-2, 3)$
  - ima teme pri  $x = 1$
  - se dotika abscisne osi
- 276.** V družini funkcij  $f(x) = 2x^2 - 2ax + 3a$  določi tisto funkcijo,
- katere graf poteka skozi točko  $A(2, 5)$
  - ki ima najmanjšo vrednost pri  $x = -1$
  - ki ima eno dvojno ničlo
- 277.** Dana je družina parabol  $y = x^2 - 2ax + a^2 + a - 3$ .
- Določi tisto parabolo iz družine, ki ima teme na osi  $x$ .
  - Za katere  $a$  ležijo vse parabole nad osjo  $x$ ?
  - Določi koordinati temena poljubne parabole iz dane družine in poišči geometrijsko mesto vseh temen.

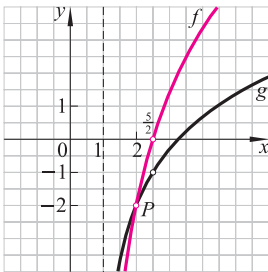
508. a)  $P(2, 3)$



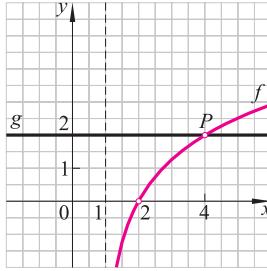
d)  $P(0, 1)$



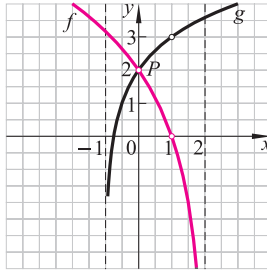
g)  $P(2, -2)$



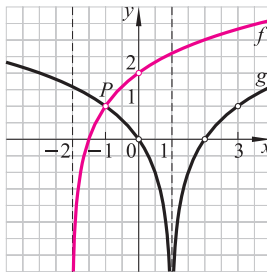
b)  $P(4, 2)$



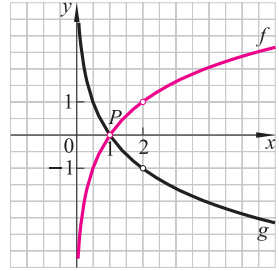
e)  $P(0, 2)$



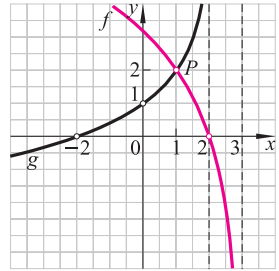
h)  $P(-1, 1)$



c)  $P(1, 0)$



f)  $P(1, 2)$



509. a)  $x = 3, y = -1$    b)  $x = 2, y = 3$    c)  $x = 3, y = 6$    d)  $x = 10, y = 5$

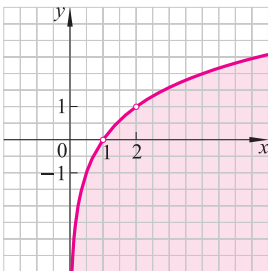
510. a)  $x = 3, y = 4$    b)  $x = 10, y = 1$    c)  $x = \frac{1}{3}, y = 9$    d)  $x = 100, y = 10$

511. a)  $x = 1, y = \log 2$    b)  $x_1 = 10, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = 10$

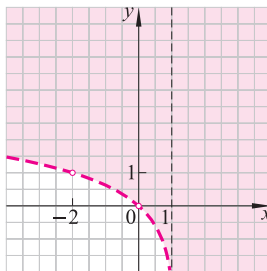
c)  $x_1 = \sqrt{10}, y_1 = -2; x_2 = \frac{\sqrt[3]{100}}{10}, y_2 = 3$

d)  $x = \frac{\log 2 \log 3}{\log^2 3 - \log 2 \log 5}, y = \frac{\log^2 2}{\log 2 \log 5 - \log^2 3}$

512. a)



b)



c)

