

Roman Brilej, Karolina Ivanec, Darja Ostruh, Zlatko Rojs

OMEGA 2

**Vektorji, potence in koreni,
funkcija in njene lastnosti**

Zbirka nalog za matematiko v 2. letniku
gimnazijskega izobraževanja

Kazalo

1	Vektorji	5
1.1	Kotne funkcije ostrih kotov	6
1.2	Kotne funkcije kotov do 360°	12
1.3	Točke, premice in ravnine v prostoru	14
1.4	Vzporednost v prostoru	15
1.5	Pravokotna projekcija in koti v prostoru	17
1.6	Definicija vektorja	19
1.7	Vsota in razlika vektorjev	21
1.8	Produkt vektorja s skalarjem (številom)	27
1.9	Linearna kombinacija vektorjev	29
1.10	Skalarni produkt	36
1.11	Pravokotni koordinatni sistem v prostoru	42
1.12	Vektorji v pravokotnem koordinatnem sistemu	44
1.13	Naloga za ponavljanje	53
2	Potence in koreni	57
2.1	Potence s celimi eksponenti	58
2.2	Kvadratni koren	61
2.3	Koreni poljubnih stopenj	68
2.4	Potence z racionalnimi eksponenti	73
2.5	Iracionalna enačba	76
2.6	Naloga za ponavljanje	79
3	Funkcija in njene lastnosti	81
3.1	Definicijsko območje in zaloga vrednosti	82
3.2	Graf	84
3.3	Predznak	88
3.4	Naraščanje in padanje	91
3.5	Omejenost	93
3.6	Sodost, lihost	94
3.7	Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost	97
3.8	Inverzna funkcija	100
3.9	Transformacije grafov	104
3.10	Naloga za ponavljanje	112
	Rešitve	115

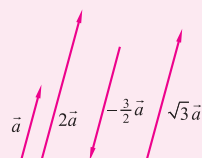
Z zvezdico (*) so označene zahtevnejše naloge.

1.8 Produkt vektorja s skalarjem (številom)

Vektor $n\vec{a}$, $n \in \mathbb{R}$, je vektor, vzporeden vektorju \vec{a} , njegova dolžina je $|n||\vec{a}|$, kaže pa v isto smer kot \vec{a} , če je $n > 0$, in v nasprotno, če je $n < 0$.

Enakost $n\vec{a} = \vec{0}$ velja natanko takrat, ko je bodisi $n = 0$ bodisi $\vec{a} = \vec{0}$.

Primeri:



Lastnosti množenja vektorja s skalarjem (številom)

- asociativnost v skalarnem faktorju

$$n(m\vec{a}) = (nm)\vec{a}$$

- distributivnost v skalarnem faktorju

$$(n + m)\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a}$$

- distributivnost v vektorskem faktorju

$$n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$$

Središčni razteg s središčem S in faktorjem k je preslikava prostora vase, ki vsako točko T preslika v T' , da je $\overrightarrow{ST'} = k\overrightarrow{ST}$.

127. Dan je vektor \vec{a} z dolžino $|\vec{a}| = 4$ cm. Nariši vektor:

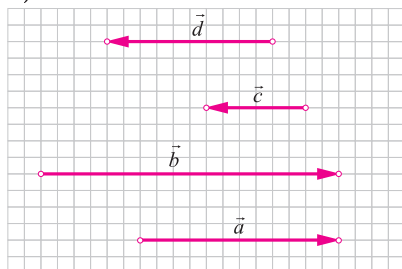
- a) $2\vec{a}$ b) $\frac{1}{2}\vec{a}$ c) $-\frac{3}{2}\vec{a}$ d) $-\frac{3}{4}\vec{a}$ e) $\frac{7}{4}\vec{a}$

128. Nariši poljuben vektor \overrightarrow{AB} (dolžine približno 4 cm) in nato nariši tako točko C , da bo:

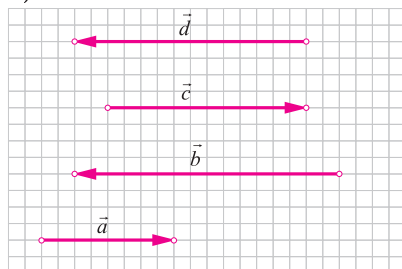
- a) $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
 d) $\overrightarrow{BC} = \sqrt{3}\overrightarrow{AB}$ e) $\overrightarrow{CA} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}$ f) $\overrightarrow{CB} = (1 - \sqrt{5})\overrightarrow{AB}$

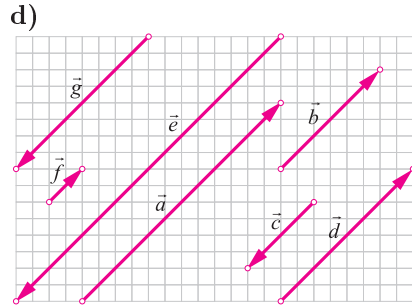
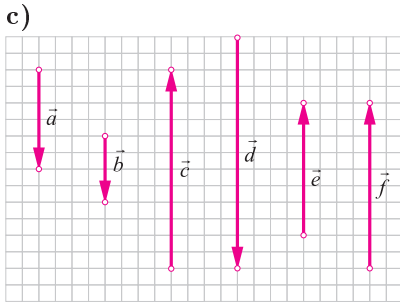
129. Izrazi preostale vektorje z vektorjem \vec{a} :

a)



b)





130. Iz dane enakosti izrazi vektor \vec{p} :

a) $\vec{p} - 2\vec{a} = \vec{0}$

b) $2\vec{p} + 4\vec{b} = \vec{0}$

c) $3\vec{e} - 4\vec{p} = \vec{0}$

d) $2\vec{d} + 4\vec{p} = \vec{p}$

e) $\frac{1}{2}\vec{e} - \frac{2}{3}\vec{p} = \frac{1}{3}\vec{e}$

f) $\frac{3}{5}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{p}$

131. Dani sta točki A in B v medsebojni oddaljenosti 6 cm. Določi tako točko T , da bo:

a) $3\vec{AT} = 4\vec{AB}$

b) $2\vec{AT} + \vec{AB} = \vec{0}$

c) $2\vec{BT} + 3\vec{BA} = \vec{0}$

*d) $\vec{AT} + \vec{BT} = \vec{0}$

*e) $5\vec{AT} + 2\vec{TB} = \vec{0}$

*f) $5\vec{AT} + 11\vec{TB} = \vec{0}$

*132. Izrazi vektor \vec{AT} z vektorjem \vec{AB} , če velja $m\vec{AT} + n\vec{BT} = \vec{0}$ za neki realni števili m in n , $m \neq -n$.

133. Na številski osi so dane točke $A(-1)$, $B(3)$, $C(5)$, $D(-4)$, $E(1)$. Izrazi vektor:

a) \vec{BC} z \vec{AB}

b) \vec{AD} z \vec{AE}

c) \vec{CE} z \vec{BA}

d) \vec{AE} s \vec{CD}

e) \vec{ED} z \vec{AC}

f) \vec{BA} z \vec{BC}

g) \vec{DA} z \vec{BC}

h) \vec{BD} z \vec{ED}

134. Na številski osi sta dani točki $A(-1)$ in $B(7)$. Določi koordinato točke C , če velja:

a) $4\vec{AC} = 3\vec{AB}$

b) $2\vec{BC} = 5\vec{AB}$

c) $8\vec{CA} + 3\vec{BA} = \vec{0}$

*d) $\vec{CB} = 7\vec{AC}$

*e) $3\vec{AC} + 5\vec{BC} = \vec{0}$

*f) $3\vec{AC} + 11\vec{CB} = \vec{0}$

*135. Izrazi vektor \vec{CB} z vektorjem \vec{AD} , če je:

a) $2\vec{AB} + 3\vec{AC} = \vec{0}$ in $2\vec{BD} + \vec{DC} = \vec{0}$

b) $5\vec{BA} - 6\vec{BD} = \vec{0}$ in $3\vec{CD} - 2\vec{CA} = \vec{0}$

136. Dan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$. Določi tak λ , da bo:

a) $\vec{AD} = \lambda\vec{BC}$

b) $\vec{FC} = \lambda\vec{BA}$

c) $\vec{DC} = \lambda\vec{BE}$

d) $\vec{AF} = \lambda\vec{ED}$

e) $\vec{FE} = \lambda\vec{CB}$

f) $\vec{DA} = \lambda\vec{EB}$

137. V kocki $ABCDEFGH$ točka P razpolavlja rob DH , točka Q pa rob BF . Določi tak λ , da bo:

a) $\vec{CG} = \lambda\vec{BQ}$

b) $\vec{PD} = \lambda\vec{QF}$

c) $\vec{PH} = \lambda\vec{PC}$

d) $\vec{DQ} = \lambda\vec{FP}$

e) $\vec{FQ} = \lambda\vec{AE}$

f) $\vec{EQ} = \lambda\vec{GP}$

138. Dana je daljica AB in na njej točka T . Izrazi vektor \vec{AT} z vektorjem \vec{AB} , če točka T deli daljico AB v razmerju $|AT| : |TB| =$:

a) 1 : 2

b) 2 : 3

c) 4 : 7

d) 9 : 16

*423. Reši sistem enačb:

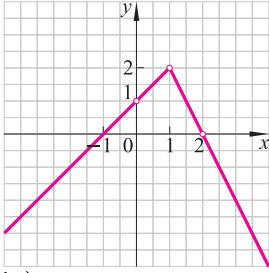
$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 & \text{b)} & \sqrt{x} - \sqrt{1-y} = 1 & \text{c)} & \sqrt{2x+y} = 3 \\ & x - y + 5 = 0 & & x - y - 12 = 0 & & y = x^2 + 1 \\ \text{d)} & \sqrt{y^2 - 2x} = 1 & \text{e)} & \sqrt{x+3} = \sqrt{y} & \text{f)} & \sqrt{x-5} = \sqrt{y+5} \\ & y = x + 1 & & \sqrt{2x+4} = \sqrt{y+7} & & \sqrt{2x-11} = \sqrt{3y-11} \end{array}$$

2.6 Naloge za ponavljanje

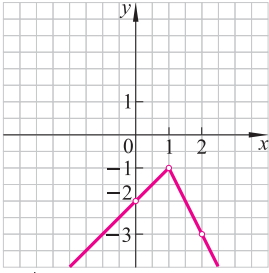
424. Dan je izraz $\frac{x^{n+1} + 4x^n + 4x^{n-1}}{x^{n-5} - 4x^{n-7}}$.
- Poenostavi dani izraz.
 - Na dve mesti natančno izračunaj njegovo vrednost za $x = 0,27$.
 - Izračunaj njegovo vrednost za $x = \sqrt{2}$.
425. Dan je izraz $\frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}$.
- Izračunaj njegovo vrednost za $x = 144$ in $y = 256$.
 - Izračunaj njegovo vrednost za $x = 32$ in $y = 8$.
 - Racionaliziraj imenovalce izraza za $x = 2$ in $y = 1$.
426. Naj bo število $a = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$.
- Racionaliziraj imenovalce števila a .
 - Izračunaj $a^2 - a$.
 - Izračunaj a^3 .
427. Dan je izraz $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$.
- Za katere x je definiran izraz?
 - Izračunaj vrednost izraza za $x = \frac{16}{25}$.
 - Racionaliziraj imenovalce izraza.
428. Dan je izraz $\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}$.
- Za katere x je definiran izraz?
 - Izračunaj vrednost izraza za $x = \sqrt{2} - 1$.
 - Za katere x je vrednost izraza 1.
429. Dana sta izraza $A = \frac{3x + 2\sqrt{x}}{4 - 9x} + \frac{x\sqrt{x}}{2 + 3\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2 - 3\sqrt{x}}$ in $B = \frac{2 + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^5}}$.
- Izračunaj vrednost izrazov A in B za $x = \frac{1}{4}$.
 - Izračunaj vrednost izrazov A in B za $x = 2$.
 - Dokaži, da je $A \cdot B = \frac{1}{x}$.

- 430.** Naj bo $a = 9 - 3\sqrt[3]{x}$ in $b = \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$.
- Za dana izraza a in b poenostavi izraz ab .
 - Koliko je $a - b$, če je $x = -8$?
 - Za kateri x bo $a + b = 18$?
- 431.** Naj bo $a = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ in $b = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$.
- Za dana izraza a in b poenostavi izraz ab .
 - Koliko je $a + 2b$, če je $x = 27$?
 - Za kateri x bo $a = b$?
- 432.** Dan je izraz $\sqrt[6]{\frac{a^4\sqrt{b}}{b^4\sqrt[4]{a}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$.
- Poenostavi dani izraz.
 - Izračunaj njegovo vrednost za $a = 16$ in $b = 81$.
 - Na dve mesti natančno izračunaj vrednost izraza za $a = 3 \cdot 6$ in $b = 2 \cdot 5$.
- 433.** Dan je izraz $\frac{2\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + 1}$.
- Izračunaj vrednost izraza za $x = \frac{1}{8}$.
 - Za katere x je vrednost izraza enaka 1?
 - Racionaliziraj imenovalc za $x = 3$.
- 434.** Dana sta izraza $A = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} - 1} - \frac{1}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1}$ in $B = \frac{a - 1}{a^{\frac{5}{6}} + 1}$.
- Izračunaj vrednost izrazov A in B za $a = 64$.
 - Za katere a sta definirana izraza A in B .
 - Dokaži, da je $A \cdot B = 1$.
- *435.** Lagrangeova enakost je $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.
- Določi pogoje, za katere a in b je enakost definirana.
 - Dokaži enakost.
 - S pomočjo enakosti izračunaj $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.
- 436.** Dan je izraz $\left(\frac{x^2y}{x^{-1}y^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{5}} : \left(\frac{x}{y^4}\right)^{\frac{1}{10}}$.
- Zapiši ga s koreni.
 - Poenostavi izraz.
 - Izračunaj njegovo vrednost za $x = 2\sqrt[3]{2}$ in $y = \sqrt[3]{4}$.
- 437.** Dana je enačba $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3} = a$.
- Določi tak parameter a , da bo rešitev enačbe $x = 6$.
 - Reši enačbo, če je $a = 0$.
 - Reši enačbo, če je $a = \sqrt{6}$.

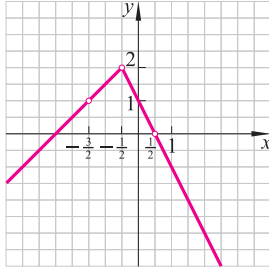
499. a) i)



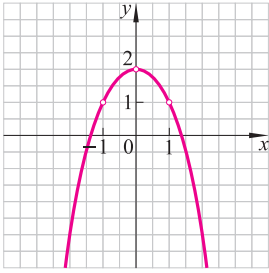
iv)



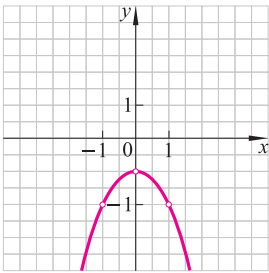
vii)



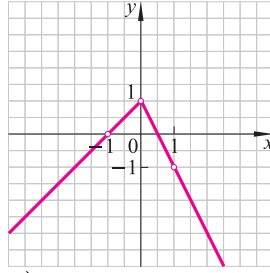
b) i)



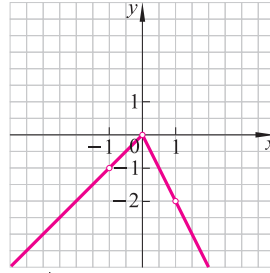
iv)



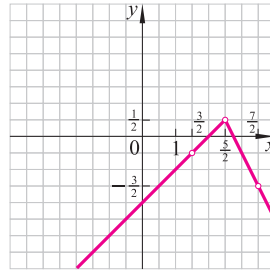
ii)



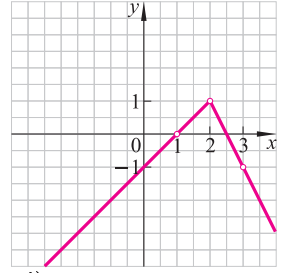
v)



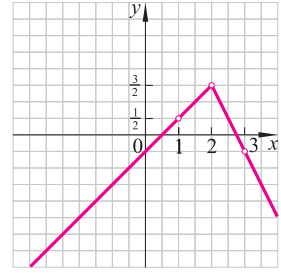
viii)



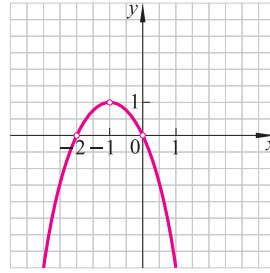
iii)



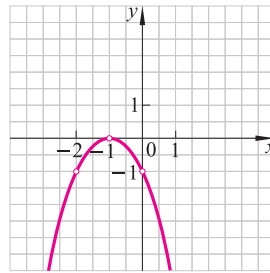
vi)



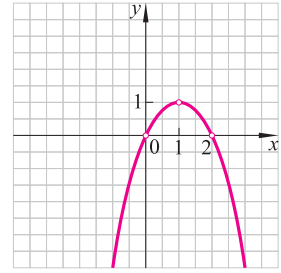
ii)



v)



iii)



vi)

