

Roman Brilej, Boro Nikič

OMEGA 3

**Polinomi in racionalne funkcije,
stožnice**

Zbirka nalog za matematiko v 3. letniku
gimnazijskega izobraževanja

Ljubljana 2013

Kazalo

1	Polinomi in racionalne funkcije	3
1.1	Definicija polinoma, seštevanje in množenje	6
1.2	Deljenje polinomov	10
1.3	Niče polinoma	12
1.4	Hornerjev algoritem	16
1.5	Razcepljanje polinoma	18
1.6	Iskanje ničel	21
1.7	Graf polinoma	24
1.8	Bisekcija	29
1.9	Neenačbe višjih stopenj	30
1.10	Definicija in osnovne lastnosti racionalnih funkcij	32
1.11	Graf racionalne funkcije	35
1.12	Racionalne enačbe in neenačbe	42
1.13	Naloga za ponavljanje	48
2	Stožnice	53
2.1	Razdalja med točko in premico	54
2.2	Množice točk v ravnini	58
2.3	Transformacije na ravnini	59
2.4	Krožnica	62
2.5	Elipsa	70
2.6	Hiperbola	79
2.7	Parabola	88
2.8	Krivulje druge stopnje	94
2.9	Naloga za ponavljanje	96
	Rešitve	99

1.1 Definicija polinoma, seštevanje in množenje

Polinom p je realna funkcija oblike:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Realna števila a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 so koeficienti polinoma p .

Pri tem je $a_n \neq 0$, razen v primeru, ko so vsi koeficienti enaki 0 (ničelni polinom). Koeficient a_n imenujemo **vodilni koeficient**, člen $a_n x^n$ pa **vodilni člen**. Koeficient a_0 je **prosti koeficient** ali **prosti člen**. Število n je **stopnja** polinoma. Označimo jo z $n = \text{st}(p)$.

Pogosto obravnavamo polinom p kot kompleksno funkcijo $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ z realnimi koeficienti, včasih pa tudi s kompleksnimi koeficienti.

Vsota $p + q$ polinomov p in q je polinom, katerega koeficienti so vsote istoležnih koeficientov polinomov p in q . **Razlika** $p - q$ polinomov p in q je polinom, katerega koeficienti so razlike istoležnih koeficientov polinomov p in q .

Produkt pq polinomov p in q je polinom, ki ga dobimo, če polinoma p in q zmnožimo kot veččlenika. Stopnja produkta je enaka vsoti stopenj posameznih faktorjev.

1. Za dano funkcijo ugotovi, ali je polinom:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

b) $f(x) = -3x^2 - x - 2$

c) $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 3x$

d) $f(x) = -5x^3 + 2x + 1$

e) $f(x) = 6x^7 + 5x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$

f) $f(x) = 2x^{-3}$

g) $f(x) = 2x^{-4} + 3x^{-3} - 2x^{-1} - 4$

h) $f(x) = -3x^{111} - 7$

i) $f(x) = \log_2 x$

j) $f(x) = \log^3 x + \log^2 x - \log x - 1$

k) $f(x) = -3$

l) $f(x) = 5x + 1$

m) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

n) $f(x) = \sqrt{5}x^3 + \sqrt{2}x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt{5}$

o) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} - 2$

p) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - x^4$

2. Določi stopnjo, vodilni koeficient, vodilni člen in prosti člen polinoma $p(x) =$:

a) $5x^2 + 2x - 3$

b) $-2x^2 - x + 7$

c) $4x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

d) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$

e) $-x^4 + 2x^2 + 2$

f) $2x^4 + x^3 - x^2 + 4x$

g) $x^8 + 2x^5 - 11x^3 - x$

h) $4x - 1$

i) $-x^4$

j) 2

k) $3x^2 + 1 - x^4$

l) $2x + 2x^6$

m) $-\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x + 4$

n) $-x^5 + x^2 - 3x - \frac{5}{2}$

o) $2 \cdot 25x^3 - 1 \cdot 5x + 0 \cdot 5$

p) $\sqrt{2}x^3$

r) $\sqrt{5}x^2 - 2x - \sqrt{2}$

s) $\sqrt[3]{1 + \pi x^4} - e^3 x^3 + \pi^2 x^2 + 2e$

3. Seštej polinoma:

- a) $x^3 + 2x$ in $x^2 + 3x + 1$ b) $2x^3 + x^2 - 2$ in $x^4 - 2x^2 + 4x$
c) $x^3 - 2$ in $x + 4$ d) $-3x^4 + 2x^2$ in $2x^3 + 5x - 1$
e) $x^2 + 3x + 1$ in $x^2 + x - 2$ f) $-x^2 + 4x - 3$ in $x^2 - 2x - 2$
g) $2x^3 + 4x^2 - 1$ in $-5x^3 + 6x$ h) $6x^7 + 4x^3 + 2x$ in $5x^3 + 2x^2 - 4$
i) $5x^4 - 3x^3 + 2x - 4$ in $-5x^4 + 2x^3 + 6x^2$
j) $5x^7 + 3x^6 - 2x^2 + 1$ in $-3x^6 + 2x^2 - 1$
k) $x^4 + x^2 + 1$ in $-x^3 - x$ l) $-2x^6 + 4x^3 - 2$ in $2x^6 - 4x^3 + 5$
m) $4x^4 - 2x^2 - 5x$ in $-4x^4 + 2x^2 + 5x$ n) $\frac{1}{2}x^3 + 4x - \frac{7}{3}$ in $\frac{1}{2}x^3 + 6x^2 + \frac{1}{3}$
o) $5x^5 + 4x^3 + \frac{7}{5}x$ in $-2x^4 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$ p) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$ in $2x^3 - \frac{3}{4}$
r) $\frac{3}{2}x^3 + 2x - \frac{1}{3}$ in $-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$
s) $4x^8 + \frac{2}{7}x^6 + 8x^3 - \frac{1}{3}x + 4$ in $\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{5}x$
t) $2\sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^2 - \sqrt{7}$ in $-3\sqrt{2}x^3 + \sqrt{5}x$
u) $\sqrt{3}x^5 + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + 2$ in $x^4 + x^3 - 4\sqrt{3}x$

4. Odštej polinoma:

- a) $2x^3 + 3x$ in $x^2 + x - 3$ b) $2x^3 + x^2 - 2$ in $x^4 - 2x^2 + 4x$
c) $2x^3 - 1$ in $x + 3$ d) $-x^4 + 2x^2$ in $4x^3 + 5x - 1$
e) $x^2 + 3x + 1$ in $-x^2 + x - 2$ f) $x^2 + 4x - 3$ in $x^2 - 2x - 2$
g) $2x^3 + 4x^2 - 1$ in $-5x^3 + 5x$ h) $3x^7 - 3x^6 + 2x^2$ in $-3x^6 + 2x^2$
i) $-5x^4 + 3x^3 + 2x - 4$ in $-5x^4 + 2x^3 - 6x^2$
j) $6x^7 + x^3 + 2x$ in $5x^3 + 2x^2 - 4$ k) $x^4 + x^2 + 1$ in $-x^3 - x$
l) $-4x^6 + 8x^3 + 2x$ in $-4x^6 + 2x$ m) $4x^4 - 2x^2 - 5x$ in $-4x^4 + 2x^2 + 5x$
n) $\frac{3}{2}x^3 + 6x - \frac{7}{3}$ in $\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + \frac{2}{3}$ o) $3x^5 + 4x^3 - \frac{6}{5}x$ in $-2x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{5}$
p) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{5}x$ in $2x^3 - \frac{3}{4}$ r) $\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{3}$ in $-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{6}$
s) $3x^{10} + 2x^7 - x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4x$ in $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 7$
t) $2\sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^2 - \sqrt{7}$ in $-3\sqrt{2}x^3 + \sqrt{5}x$
u) $\sqrt{3}x^5 + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + 2$ in $x^4 + \sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{3}x - 5$

5. Dani so polinomi $p(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x + 6$, $q(x) = 2x^4 - 2x^2 - x - 1$ in $r(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 4$. Izračunaj:

- a) $p(x) + q(x)$ b) $p(x) + r(x)$ c) $q(x) - r(x)$
d) $p(x) - r(x)$ e) $p(x) + r(x) + q(x)$ f) $p(x) - r(x) - q(x)$
g) $2 \cdot p(x) - q(x)$ h) $q(x) + 4 \cdot r(x)$ i) $2 \cdot r(x) - 3 \cdot p(x)$
j) $4 \cdot p(x) - 2 \cdot q(x)$ k) $q(x) - (2 \cdot p(x) - 2r(x))$
l) $5 \cdot p(x) - (3 \cdot r(x) - 2q(x))$

2.9 Naloge za ponavljanje

- 516.** Dana je krivulja $4x^2 + 5y^2 = 20$.
- Nariši jo.
 - Kolikšna je numerična ekscentričnost te krivulje?
 - Na krivulji določi točke, ki so od premice $x = 3$ oddaljene 2 enoti.
- 517.** Določi tak a , da bo krivulja iz družine $9x^2 + ay^2 = 225$:
- krožnica
 - elipsa z linearno ekscentričnostjo $2\sqrt{5}$
 - hiperbola z asimptoto $y = -x$
- 518.** Dani sta krivulji $x^2 - y^2 = 4$ in $x^2 + y^2 + 2x = 0$.
- Nariši ju v istem koordinatnem sistemu in določi njuna presečišča.
 - Zapiši enačbo skupne tangente obeh krivulj.
 - Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi levo gorišče prve krivulje in tisto točko druge krivulje, ki ima ordinato 1.
- 519.** Dana je krivulja $y^2 = 2x$.
- Nariši jo in jo prezrcali čez simetralo sodih kvadrantov.
 - Zapiši enačbo prezrcaljene krivulje.
 - Določi presečišča obeh krivulj.
- 520.** Dan je trikotnik z oglišči $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 1)$.
- Zapiši enačbo elipse, simetrične glede na koordinatni osi, ki poteka skozi trikotnikova oglišča.
 - Zapiši enačbo hiperbole, ki ima gorišči v ogliščih A in B , njena asimptota pa poteka skozi točko C .
- *c) Zapiši enačbo trikotniku očrtane krožnice.
- 521.** Dana množica točk (x, y) zadošča pogoju $4y^2 - x^2 \geq 4$.
- *a) Nariši to množico točk.
- Zapiši enačbo asimptot krivulje, ki omejuje dano množico točk.
 - Določi gorišči krivulje iz prejšnje točke.
- 522.** Dani sta krivulji $x^2 + 2y^2 = 8$ in $y^2 = x$.
- Določi njuna presečišča in krivulji nariši v istem koordinatnem sistemu.
 - Izračunaj razdaljo med desnim goriščem prve in goriščem druge krivulje.
- *c) Kolikšna je oddaljenost temena druge krivulje od premice, ki poteka skozi presečišči prve krivulje s pozitivnima deloma koordinatnih osi.
- 523.** Dani sta krožnici $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ in $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.
- Pokaži, da sta koncentrični.
 - Nariši množico točk (x, y) , za katere je $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 \geq 0$ in $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 \leq 0$.
- *c) Zapiši enačbo elipse, ki se dotika obeh krožnic, njena velika polos pa je vzporedna z abscisno osjo.

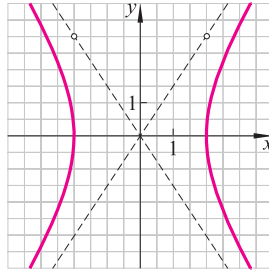
524. Dana je elipsa $9x^2 + y^2 = 9$.

- Določi ji temena in jo nariši.
- Elipso prezrcali čez premico $x = 2$. Dobljeno krivuljo nariši in zapiši njeno enačbo.
- Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje elipsa.

525. Množico M sestavljajo točke (x, y) , ki zadoščajo pogoju $x^2 + 2y^2 \geq 6$.

- Nariši množico M .
- Izračunaj dolžino tistega dela premice $y = \frac{1}{2}x$, ki ne leži v množici M .
- Zapiši enačbo največjega mogočega kroga, ki ne leži v množici M .

526. Na sliki je narisana ena izmed stožnic.



- Opiši jo.
- Izračunaj dolžino daljice, ki jo ta stožnica odreže od premice $3x + 4y = 6$.
- *c) Določi gorišči stožnice, ki jo dobimo, če dano stožnico prezrcalimo čez simetralo lihlih kvadrantov.

527. Dani sta parabola $y^2 = 6x$ in premica $y = \sqrt{2}x$.

- Določi njuna presečišča in krivulji nariši.
- Izračunaj oddaljenost gorišča parabole od dane premice.
- c) Zapiši enačbo hiperbole, ki ima središče v temenu dane parabole, gorišče v gorišču parabole, dana premica pa je asimptota te hiperbole.

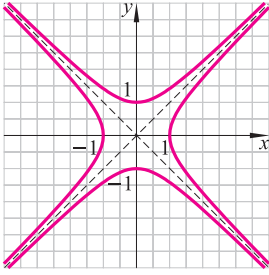
528. Dana je hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$.

- Zapiši enačbo elipse, ki ima temeni v goriščih, gorišči pa v temenih dane hiperbole.
- b) Določi presečišča elipse iz prejšnje točke in dane hiperbole ter krivulji tudi nariši.
- **c) Zapiši enačbo parabole, ki ima gorišče v desnem gorišču dane hiperbole, njena vodnica pa je asimptota hiperbole, ki poteka skozi I. in III. kvadrant.

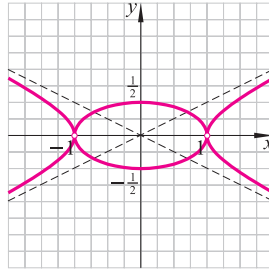
*529. Dana je hiperbola $4x^2 - y^2 - 16x + 14y + 8 = 0$.

- Določi ji temena in jo nariši.
- b) Zapiši enačbi njenih asimptot.
- c) Določi presečišča hiperbole z abscisno osjo.

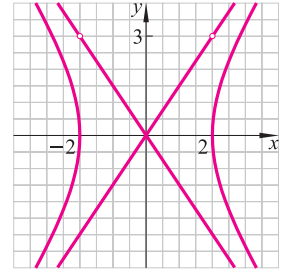
459. a)



b)



c)



460. a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = -1$ d) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{2} = -1$

461. a) Hiperbola, simetrična glede na koordinatni osi, s temenoma na abscisni osi, z realno osjo 3 in imaginarno osjo $6\sqrt{2}$.

b) Hiperbola, simetrična glede na koordinatni osi, s temenoma na ordinatni osi, z realno osjo 6 in imaginarno osjo $12\sqrt{2}$.

462. $F_1(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), F_2(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

463. $y = \frac{1}{4x}$

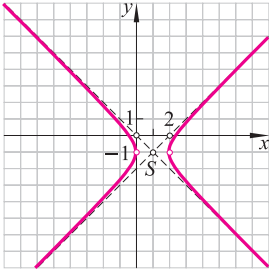
464. a) $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{16} = 1, T_1(0, 4), T_2(4, 4)$

b) $\frac{(x-3)^2}{8} - \frac{(y+2)^2}{9} = -1, T_1(3, -5), T_2(3, 1)$

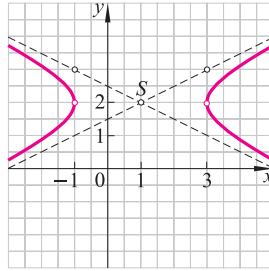
c) $4(x+1)^2 - 9(y+3)^2 = 36, T_1(-4, -3), T_2(2, -3)$

d) $8(x+2)^2 - 7(y-1)^2 = -56, T_1(-2, 1-2\sqrt{2}), T_2(-2, 1+2\sqrt{2})$

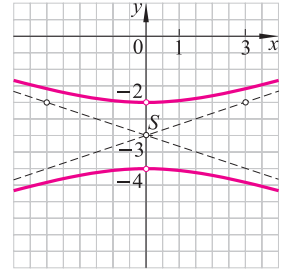
465. a)



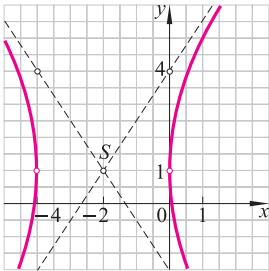
b)



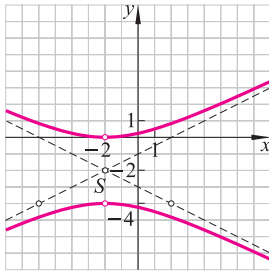
c)



d)



e)



f)

