

Roman Brilej, Boro Nikič, Rudi Seljak

OMEGA 4

**Kombinatorika, verjetnostni račun,
statistika**

Zbirka nalog za matematiko v 4. letniku
gimnazijskega izobraževanja

Ljubljana 2013

Kazalo

1	Kombinatorika	5
1.1	Osnovni izrek kombinatorike	6
1.2	Permutacije	10
1.3	Variacije	15
1.4	Kombinacije	20
1.5	Binomski izrek	26
1.6	Naloge za ponavljanje	28
2	Verjetnostni račun	31
2.1	Poskusi in dogodki	32
2.2	Verjetnost dogodka	36
2.3	Pogojna verjetnost in verjetnost produkta	49
2.4	Naloge za ponavljanje	64
3	Statistika	71
3.1	Osnovni statistični pojmi	72
3.2	Urejanje podatkov	75
3.3	Prikazovanje podatkov	81
3.4	Srednje vrednosti	88
3.5	Mere variabilnosti	97
3.6	Naloge za ponavljanje	101
	Rešitve	107

1.3 Variacije

Variacije brez ponavljanja reda r iz n elementov so razporedi r različnih elementov iz množice z n elementi v niz dolžine r ($r \leq n$). Njihovo število je:

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Število vseh injektivnih preslikav iz množice z r elementi v množico z n elementi ($r \leq n$) je enako V_n^r .

Variacije s ponavljanjem reda r iz n elementov so razporedi elementov iz množice z n elementi v niz dolžine r (posamezni element se lahko večkrat ponovi). Njihovo število je:

$${}^{(p)}V_n^r = n^r$$

Število vseh preslikav iz množice z r elementi v množico z n elementi je enako ${}^{(p)}V_n^r = n^r$.

Variacije brez ponavljanja

60. Zapiši vse besede dolžine 2, ki jih lahko sestaviš iz črk dane besede, če se črke ne smejo ponavljati:
- a) POK b) MINA c) MIZAR
61. Izračunaj:
- a) V_7^3 b) V_6^4 c) V_{10}^2 d) V_{16}^4
62. Določi naravno število n , za katerega velja:
- a) $V_n^2 = 42$ b) $V_n^3 = 3V_n^2$ c) $V_{n-1}^2 = n+2$ d) $V_n^3 = 120$
e) $V_{n+1}^2 = n^2 - n + 12$
63. Zapiši vse variacije brez ponavljanja reda 3, ki jih dobimo iz črk besede MOKA.
64. Iz množice števk $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ sestavljamo 3-mestna števila brez ponavljanja števk.
- a) Koliko je vseh takih števil?
b) Koliko števil se začne s števk 3?
c) Koliko števil se konča s števk 9?
d) Koliko števil je večjih od 300?
*e) Koliko števil je deljivih s številom 3?
65. Koliko števil, večjih od 3000 in manjših od 6000, lahko sestavimo iz množice števk $\{0, 2, 3, 8, 9\}$, če se števke ne smejo ponavljati in:
- a) ni dodatnih omejitev
b) morajo biti števila soda
c) morajo biti števila liha
d) na mestu desetic ne sme stati števk 8
*e) morajo biti števila deljiva s 3

- 66.** V Poslovnem registru Slovenije je matična številka, ki predstavlja enolično identifikacijo podjetja, 7-mestno naravno število. Koliko podjetjem lahko zagotovimo enolično identifikacijo, če:
- je edina omejitev, da na prvem mestu ne stoji 0
 - se mora matična številka začeti z eno od števk 1, 2, 5
- 67.** Iz množice črk $\{A, B, C, D, E, F, U\}$ sestavljamo besede dolžine 4 brez ponavljanja črk. Koliko različnih besed lahko dobimo, če:
- ni dodatnih omejitev
 - se morajo besede začeti z E
 - se besede ne smejo začeti z U
 - se besede ne smejo končati z nizom AB
 - se morajo besede začeti s samoglasnikom
- 68.** Mirko si bo vsak dan v tednu ogledal enega od filmov, ki jih predvajajo v kinematografih. Ta teden ima na voljo 6 različnih ameriških, 4 različne angleške in 2 različna slovenska filma. Na koliko načinov lahko sestavi program ter vrstni red filmov, če bo vsak film gledal le enkrat in:
- ni dodatnih pogojev
 - bo v ponedeljek gledal enega od slovenskih filmov
 - v nedeljo ne bo gledal ameriškega filma
 - si bo od nedelje do srede ogledal vse angleške filme
- 69.** Na železniški progi je 15 postaj. Koliko potovanj z različno začetno ali končno postajo si lahko omislimo na tej progi?
- 70.** V mestu je 10 turističnih znamenitosti, od tega 2 muzeja, 4 cerkve in 4 spomeniki. Obiskovalec bi si v dneh od petka do nedelje vsak dan rad ogledal po eno znamenitost. Na koliko načinov lahko sestavi načrt ogledov, če bo vsako znamenitost obiskal le enkrat in:
- ni dodatnih pogojev
 - si bo v nedeljo ogledal eno od cerkva
 - v petek ne bo obiskal muzeja
 - ima v svojem načrtu obvezen ogled dveh muzejev
- 71.** Potovalna agencija Izletek prireja izlet z vesoljsko ladjo po štirih izmed devetih (poznanih) planetov našega osončja. Koliko je možnih vozniških redov potovanja, če bo vsak od izbranih planetov obiskal le enkrat in:
- ni dodatnih omejitev
 - mora potovanje vključevati obisk na Veneri
 - mora biti prva postaja potovanja Mars
 - mora potovanje vključevati obisk Jupitra in Saturna in mora biti Jupiter v vozniškem redu pred Saturnom

- *485.** Naj bo a aritmetična sredina in s standardni odklon števil x_1, x_2, \dots, x_n .
- Določi aritmetično sredino in standardni odklon števil $\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{2}$.
 - Določi aritmetično sredino in standardni odklon števil kx_1, kx_2, \dots, kx_n , kjer je k poljubno realno število.
- **486.** Dokaži, da je $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2$, kjer je σ^2 varianca in μ aritmetična sredina števil x_1, x_2, \dots, x_n .

3.6 Naloge za ponavljanje

- 487.** Janez in Jože sta dva stara upokojenska prijatelja, ki se vsako jutro dobita na kavi. Za določitev plačnika zapitka sta se dogovorila za naslednjo igro: Vsak od njiju desetkrat vrže (isti) kovanec. Zapitek plača tisti, ki je v teh desetih poskusih dobil manjše število grbov. Če je izid izenačen, plača tisti, ki je plačal zadnjikrat. V mesecu februarju sta po vrsti dosegla sledeče število grbov.

Janez: 4, 6, 8, 4, 6, 4, 8, 5, 5, 2, 5, 6, 5, 4, 6, 5, 6, 6, 7, 5, 5, 3, 5, 5, 3, 4, 6, 4

Jože: 6, 2, 5, 4, 4, 6, 2, 5, 4, 6, 5, 6, 5, 8, 6, 6, 6, 7, 4, 7, 5, 6, 5, 3, 3, 7, 4, 5

- Kolikokrat je zapitek plačal Jože in kolikokrat Janez?
 - Za vsakega igralca sestavi frekvenčno tabelo z izračunanimi frekvencami ter relativnimi frekvencami in nariši histogram.
 - Za oba igralca izračunaj aritmetično sredino, mediano ter modus števila grbov.
- 488.** V tabeli so predstavljeni podatki o številu zmag in številu porazov moštev zahtodne konference košarkarske lige NBA v sezoni 2001/2002.

Ekipa	Št. zmag	Št. porazov
Houston	28	54
L.A. Clippers	39	43
Portland	49	33
Sacramento	61	21
San Antonio	58	24
Phoenix	36	46
Denver	27	55
L.A. Lakers	58	24
Seattle	45	37
Memphis	23	59
Dallas	57	25
Minnesota	50	32
Utah	44	38
Golden State	21	61

Vir: www.NBA.com

- Za število zmag definiraj frekvenčne razrede širine 10 ($[21-30] \dots$), zapiši frekvenčno tabelo z izračunanimi frekvenca mi ter relativnimi frekvenca mi in nariši histogram.
- Za najboljši dve ter najslabši dve moštvi nariši strukturni krog, kjer bo prikazano razmerje med številom zmag in številom porazov.
- Izračunaj povprečno število zmag ter povprečno število porazov moštev zahodne konference. Za obe spremenljivki izračunaj še mediano ter modus.

489. Člani družine Klepetač so se dogovorili, da bodo en teden vsak dan merili količino časa, ki ga porabijo za pogovore preko mobilnega telefona. Rezultati (v minutah) so predstavljeni v naslednji tabeli:

	Pon	Tor	Sre	Čet	Pet	Sob	Ned
oče	10	8	6	5	0	10	12
mama	9	0	15	4	3	2	0
hčerka	18	24	32	48	44	55	32

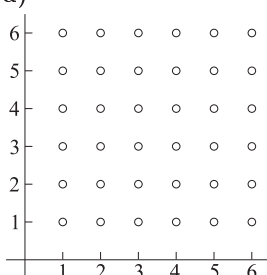
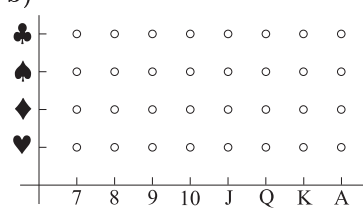
- Za vsakega člana družine uredi dneve od tistega z najmanj do tistega z največ minutami pogovora.
- Na isto sliko nariši linijski diagram za vsakega člana družine.
- Za vsakega člana družine izračunaj aritmetično sredino pogovorov v tem tednu. Izračunaj še standardni odklon.

490. V tabeli je prikazan seznam 10 izmed 75 držav dobitnic medalj na poletnih olimpijskih igrah Atene 2004. Pri vsaki državi je podano število osvojenih medalj na teh olimpijskih igrah ter število prebivalcev v času olimpijskih iger.

Država	Število medalj	Število prebivalcev
Južna Afrika	6	42 718 530
Indija	1	1 065 070 607
Indonezija	4	238 452 952
Iran	6	69 018 924
Irska	1	3 969 558
Izrael	2	6 199 008
Italija	32	58 057 477
Jamajka	5	2 713 130
Japonska	37	127 333 002
Južna Koreja	30	48 598 175

Vir: www.geographic.org

- Kako bi opredelil izbrano populacijo držav? Katere in kakšne vrste statističnih spremenljivk so definirane na tej populaciji?
- Izračunaj število medalj na milijon prebivalcev za vsako državo. Razvrsti države v padajočem vrstnem redu po številu doseženih medalj ter po številu medalj na milijon prebivalcev.
- Za najboljše štiri države po številu medalj nariši stolpčni diagram.

167. Slučajni dogodki so A, B, D in F .
168. Nemogoči dogodki: B ; gotovi dogodki: D, F ; slučajni dogodki: A, C, E .
169. A' – pade vsaj en mož, B' – padejo tri cifre, C' – mož ne pade natanko dvakrat, D' – padeta vsaj dve cifri, E' – padeta kvečjemu dva moža
170. $A \subset C, A \subset E, B \subset E, C \subset E, D \subset E, F \subset A, F \subset B, F \subset C, F \subset D, F \subset E$
171. a) Izvlečena karta je srčev kralj ali križeva šestica.
 b) Izvlečena karta je srčev kralj.
 c) Izvlečena karta je srčev kralj ali pikova dvojka.
 d) Izvlečena karta je križeva šestica in rdeče barve.
 e) Izvlečena karta je križeva šestica ali pikova dvojka.
 f) Izvlečena karta je rdeče barve ali pikova dvojka.
 g) Izvlečena karta je srčev kralj ali pikova dvojka.
172. a) Sestavljeno število je 12.
 b) Ssestavljeno število je 12.
 c) Ssestavljeno število je 12 ali večje od 90.
 d) Ssestavljeno število je sodo in večkratnik števila 3.
 e) Ssestavljeno število je sodo ali večkratnik števila 3 ali večje od 90.
 f) Ssestavljeno število je 96.
 g) Ssestavljeno število je hkrati sodo in večkratnik števila 3 ali večje od 90.
173. Združljivi pari dogodkov: A in C, B in C, B in D, C in D .
 Združljive trojice dogodkov: B, C in D
174. a) C' b) $A \cup B$ c) $B \cap C$ d) $A \cap C'$ e) $A \cap (B \cap C)'$ f) $(B \cap C) \cup A$
175. a) E_1 – pade cifra; E_2 – pade mož
 b) E_1 – na obeh kovancih pade cifra;
 E_2 – na prvem kovancu pade cifra, na drugem pa mož;
 E_3 – na prvem kovancu pade mož, na drugem pa cifra;
 E_4 – na obeh kovancih pade mož
 c) E_1 – pade ena pika; E_2 – padeta dve piki; E_3 – padejo tri pike;
 E_4 – padejo štiri pike; E_5 – pade pet pik; E_6 – pade šest pik
176. a)  b) 
177. Elementarni dogodki: A, E , sestavljeni dogodki: B, C .
178. a) 4 b) 12 c) 16
179. a) 4 b) 16 c) 36 d) 1296 e) 2704 f) 144400
180. a) Da. b) Da. c) Ne. d) Ne. e) Da.