

Roman Brilej, Barbara Kušar

alfa

Geometrijski liki in telesa

Zbirka nalog za matematiko v
srednjem strokovnem izobraževanju

Ljubljana 2014

Kazalo

1 Geometrijski liki	5
1.1 Večkotniki	6
1.2 Razreševanje trikotnika	47
1.3 Krog	68
1.4 Naloge za ponavljanje	81
2 Geometrijska telesa	85
2.1 Prizma	86
2.2 Piramida	114
2.3 Valj	132
2.4 Stožec	139
2.5 Krogla	150
2.6 Naloge za ponavljanje	158
Rešitve	161

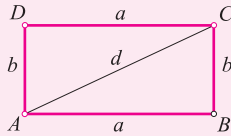
1.1 Večkotniki

Pravokotnik je štirikotnik, ki ima vse notranje kote prave, torej enake 90° . Ima dva para enako dolgih vzporednih stranic in enako dolgi diagonali, ki se razpolavljata.

$$o = 2(a + b)$$

$$S = ab$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

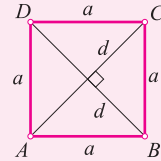


Kvadrat je pravokotnik, ki ima vse stranice enako dolge. Diagonali sta enako dolgi in se razpolavljata pod pravim kotom.

$$o = 4a$$

$$S = a^2$$

$$d = a\sqrt{2}$$



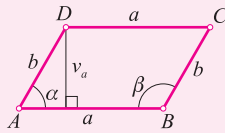
Paralelogram je štirikotnik, ki ima dva para enako dolgih vzporednih stranic. Nasprotna kota sta skladna, sosedna pa suplementarna. Diagonali se razpolavljata.

$$o = 2(a + b)$$

$$S = av_a = bv_b$$

$$S = ab \sin \alpha =$$

$$= ab \sin \beta$$

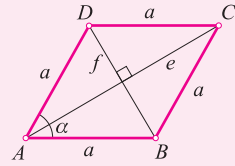


Romb je paralelogram, ki ima vse stranice enako dolge. Diagonali se razpolavljata pod pravim kotom.

$$o = 4a$$

$$S = \frac{ef}{2}$$

$$S = a^2 \sin \alpha$$



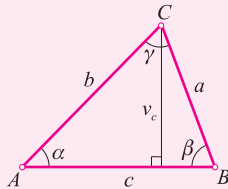
Trikotnik

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$o = a + b + c$$

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$$

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2}$$

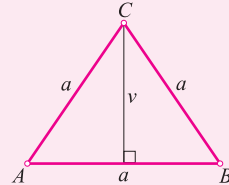


Enakostranični trikotnik je trikotnik, ki ima vse stranice enako dolge. Vsi notranji koti so enako veliki in merijo 60° .

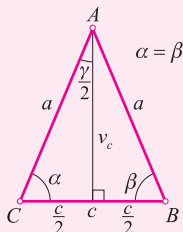
$$o = 3a$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



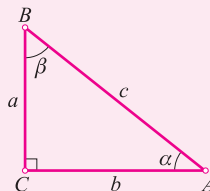
Enakokraki trikotnik je trikotnik, ki ima dve stranici enako dolgi. Ti dve stranici imenujemo **kraka**, tretja stranica pa je **osnovnica**. Kota ob osnovnici sta skladna. Ogljšče nasproti osnovnici imenujemo **vrh**. Višina na osnovnico razpolavlja osnovnico in kot pri vrhu.



Pravokotni trikotnik je trikotnik, ki ima en kot pravi - enak 90° . Stranici ob pravem kotu imenujemo **kateti**, stranica nasproti pravega kota pa je **hipotenuza**.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

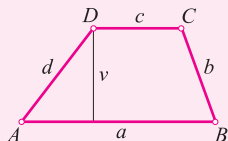
$$S = \frac{ab}{2}$$



Trapez je štirikotnik, ki ima en par vzporednih stranic. Vzporedni stranici imenujemo **osnovnici**, drugi dve pa **kraka**. Kota ob istem kraku sta suplementarna. Če sta kraka enako dolga, je trapez **enakokrak**. V enakokrakem trapezu sta kota ob osnovnici skladna, prav tako pa sta skladni tudi diagonalali.

$$o = a + b + c + d$$

$$S = \frac{a + c}{2} \cdot v$$

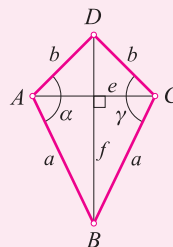


Deltoid je štirikotnik, v katerem ena diagonalala razpolavlja drugo diagonalalo pod pravim kotom. Ima dva para skladnih stranic in dva skladna kota.

$$o = 2(a + b)$$

$$S = \frac{ef}{2}$$

$$S = ab \sin \alpha$$



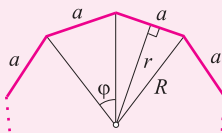
Pravilni n -kotnik je večkotnik, ki ima n enako dolgih stranic in prav toliko enako velikih notranjih kotov. Lahko mu vrtamo in očrtamo krog. Polmer vrtanega kroga označimo z r , polmer očrtanega kroga pa z R .

$$\varphi = \frac{360^\circ}{n}$$

$$o = na$$

$$S = \frac{nar}{2}$$

$$S = \frac{nR^2 \sin \varphi}{2}$$



Pravokotnik

Zgledi

1. Zapiši 857 cm^2 v dm^2 .

Rešitev: Uporabimo zvezo:

$$\boxed{1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2}$$

Od tod je:

$$1 \text{ cm}^2 = \frac{1}{100} \text{ dm}^2$$

Tako imamo:

$$857 \text{ cm}^2 = 857 \cdot \frac{1}{100} \text{ dm}^2 = 8,57 \text{ dm}^2$$

2. Zapiši $0,05 \text{ ha}$ v dm^2 .

Rešitev: Hektar postopoma pretvorimo v manjše enote:

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 100 \cdot 100 \text{ m}^2 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ dm}^2 = 1\,000\,000 \text{ dm}^2$$

Tako je:

$$0,05 \text{ ha} = 0,05 \cdot 1\,000\,000 \text{ dm}^2 = 50\,000 \text{ dm}^2$$

3. Izračunaj obseg in ploščino pravokotnika s stranicama $a = 7,2 \text{ cm}$ in $b = 15 \text{ mm}$.

Rešitev: Obseg pravokotnika s stranicama a in b je:

$$\boxed{o = 2(a + b)}$$

V našem primeru imamo opraviti s podatkom z različnima enotama, zato bo najbolje, da ju najprej pretvorimo v isto enoto. Izberimo manjšo izmed enot:

$$a = 7,2 \text{ cm} = 72 \text{ mm}$$

Sedaj izračunajmo obseg:

$$o = 2(a + b) = 2(72 + 15) = 2 \cdot 87 = 174 \text{ mm}$$

Ploščina pravokotnika je enaka produktu dolžin stranic:

$$\boxed{S = ab}$$

V našem primeru je:

$$S = ab = 72 \cdot 15 = 1\,080 \text{ mm}^2$$

4. Na dve mesti natančno izračunaj ploščino kvadrata s stranico $a = 2,7 \text{ m}$.

Rešitev: Ploščino kvadrata izračunamo z obrazcem:

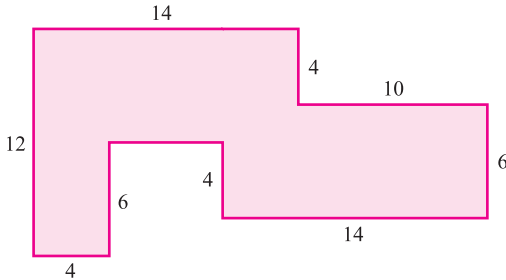
$$\boxed{S = a^2}$$

V našem primeru je:

$$S = a^2 = 2 \cdot 7^2 \doteq 7 \cdot 3 \text{ m}^2$$

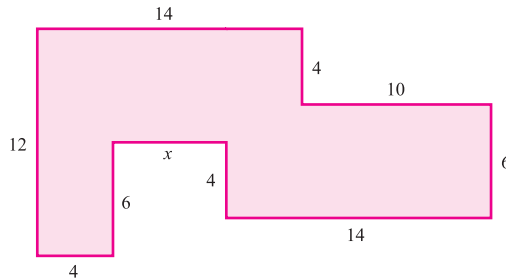
Rezultat smo, kot zahteva naloga, zaokrožili na dve mesti.

5. Izračunaj obseg in ploščino lika na sliki. Zapisane dolžine so v centimetrih.



Rešitev: Obseg danega lika je enak vsoti dolžin vseh stranic. Ker dolžine ene izmed stranic nimamo podane, jo moramo izračunati. Pri nalogi upoštevajmo, da so vsi koti v liku pravi, kar ni posebej navedeno, je pa razvidno s slike.

Označimo dolžino neznanе stranice z x :



Iz danih podatkov lahko izračunamo dolžino lika:

$$14 + 10 = 24$$

Le-to smo dobili tako, da smo sešteli dolžini zgornjih vodoravnih stranic. Seveda moramo dobiti enako, če seštejemo dolžini spodnjih vodoravnih stranic:

$$4 + x + 14 = 24$$

Enačbo uredimo:

$$x + 18 = 24$$

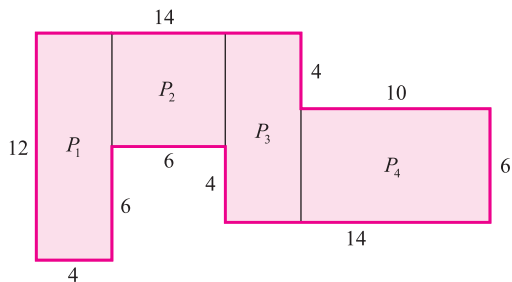
Rešitev je $x = 6$ cm.

Sedaj lahko izračunamo obseg lika. Postavimo se v eno oglišče, na primer levo spodaj, in potujmo po stranicah v smeri urnega kazalca ter seštejmo dolžine:

$$o = 12 + 14 + 4 + 10 + 6 + 14 + 4 + 6 + 6 + 4 = 80 \text{ cm}$$

Tako smo brez težav izračunali obseg. Čaka nas še ploščina. Da jo bomo lahko

izračunali, dani lik razdelimo na štiri pravokotnike:



Ploščina našega lika je enaka vsoti ploščin teh štirih pravokotnikov. Izračunajmo posamezne ploščine:

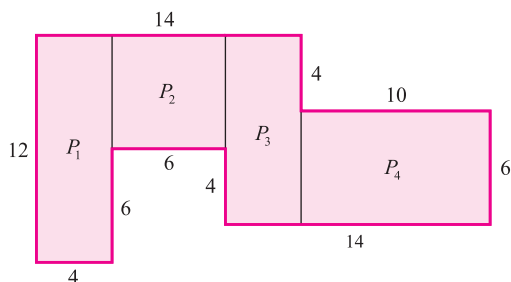
- Pravokotnik P_1

Ploščina tega pravokotnika je:

$$S_1 = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}^2$$

- Pravokotnik P_2

Najprej izračunajmo neznano stranico v tem pravokotniku. Označimo jo z y :



Vidimo, da je $y + 4$ enako vsoti dolžin navpičnih stranic na desni strani, torej $6 + 4$:

$$y + 4 = 6 + 4$$

Od tod je $y = 6$ cm in naša ploščina:

$$S_2 = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$$

- Pravokotnik P_3

Navpična stranica tega pravokotnika meri:

$$6 + 4 = 10 \text{ cm}$$

Vodoravna pa je očitno enaka:

$$14 - 10 = 4 \text{ cm}$$

Tako je ploščina pravokotnika:

$$S_3 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ cm}^2$$

- Pravokotnik P_4 :

Obe stranici imamo dani:

$$S_4 = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2$$

Sedaj samo še seštejmo izračunane ploščine in naša naloga je končana:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 48 + 36 + 40 + 60 = 184 \text{ cm}^2$$

6. Pravokotnik s stranico $a = \sqrt{5} \text{ dm}$ ima ploščino $\sqrt{10} \text{ dm}^2$. Kolikšna je druga stranica tega pravokotnika?

Rešitev: Ploščina pravokotnika je :

$$S = ab$$

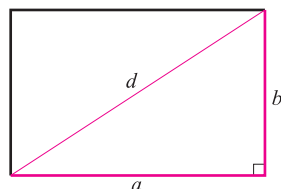
Od tod dobimo:

$$b = \frac{S}{a} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} \text{ dm}$$

7. Izračunaj dolžino diagonale v pravokotniku s stranicama $a = 12,8 \text{ cm}$ in $b = 14,5 \text{ cm}$.

Rešitev: Diagonala pravokotnika je hipotenuza v pravokotnem trikotniku, ki ga tvori s stranicama pravokotnika. Po Pitagorovem izreku je:

$$d^2 = a^2 + b^2$$



Od tod je:

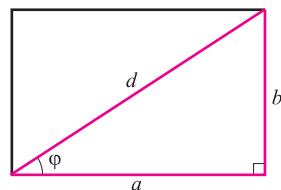
$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12,8^2 + 14,5^2} \doteq 19,3 \text{ cm}$$

Glede na to, da v nalogi ni bilo predpisano, na koliko mest naj zaokrožimo rezultat, smo se odločili, da ga zaokrožimo na tri mesta, saj imata tri mesta tudi oba podatka.

8. Koliko meri obseg pravokotnika, v katerem oklepa 7 cm dolga diagonala kot $\varphi = 37^\circ 24'$ s stranico a ?

Rešitev: V pravokotnem trikotniku s katetama a in b ter hipotenuzo d velja:

$$\sin \varphi = \frac{b}{d} \quad \text{in} \quad \cos \varphi = \frac{a}{d}$$



Od tod je:

$$b = d \sin \varphi \quad \text{in} \quad a = d \cos \varphi$$

Obseg pravokotnika je tako:

$$\begin{aligned} o &= 2(a + b) = 2(d \cos \varphi + d \sin \varphi) = 2d(\cos \varphi + \sin \varphi) = \\ &= 2 \cdot 7 \cdot (\cos 37^\circ 24' + \sin 37^\circ 24') \doteq 19,63 \text{ cm} \end{aligned}$$

Rezultat navadno zaokrožimo na toliko mest, kot jih ima najmanj natančen podatek. Resda je dolžina diagonale podana zgolj na eno mesto, vendar je v matematiki pogosta uporaba celih števil in podatek 7 cm smemo vzeti kot podatek 's poljubno' natančnostjo. Zato se odločimo za število mest, ki jih ima kot, torej štiri.

9. Obseg pravokotnika meri 196 mm. Kolikšna je njegova ploščina, če je ena stranica 14 mm daljša od druge?

Rešitev: Podatek, da je ena stranica pravokotnika 14 mm daljša od druge, lahko zapišemo kot:

$$a = b + 14$$

Izrazimo obseg pravokotnika s stranico b :

$$o = 2(a + b) = 2(b + 14 + b) = 4b + 28$$

Ker vemo, da je obseg našega pravokotnika enak 196 mm, dobimo enačbo:

$$4b + 28 = 196$$

Od tod je:

$$\begin{aligned} 4b &= 168 \quad / : 4 \\ b &= 42 \text{ mm} \end{aligned}$$

Izračunajmo še a :

$$a = b + 14 = 42 + 14 = 56 \text{ mm}$$

Tako je ploščina pravokotnika:

$$S = ab = 56 \cdot 42 = 2352 \text{ mm}^2$$

10. Ploščina pravokotnika meri 180 m^2 . Ena stranica je za 25 % večja od druge stranice. Koliko meri obseg tega pravokotnika?

Rešitev: Podobno kot v prejšnji nalogi zapišimo odnos med stranicama:

$$a = b + 25\% \cdot b = b + 0,25b = 1,25b = \frac{5}{4}b$$

Ploščino pravokotnika izrazimo s stranico b :

$$S = ab = \frac{5}{4}b \cdot b = \frac{5}{4}b^2$$

Upoštevajmo, da je ploščina enaka 180 m^2 :

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}b^2 &= 180 \quad / \cdot \frac{4}{5} \\ b^2 &= 144 \end{aligned}$$

Ker je b dolžina stranice, je pozitivna, zato upoštevamo samo pozitivno rešitev te enačbe, torej $b = 12 \text{ m}$. Izračunajmo še a :

$$a = \frac{5}{4}b = \frac{5}{4} \cdot 12 = 15 \text{ m}$$

Obseg pravokotnika je tako:

$$o = 2(a + b) = 2(15 + 12) = 54 \text{ m}$$

11. Izračunaj ploščino pravokotnika, v katerem sta stranici v razmerju 5 : 12, polmer pravokotniku očrtane krožnice pa meri 26 cm.

Rešitev: Polmer pravokotniku očrtane krožnice je enak polovici pravokotnikove diagonale, torej:

$$r = \frac{d}{2} = 26$$

Od tod je $d = 52$ cm. Ker sta stranici pravokotnika v razmerju 5 : 12, potem velja za nek pozitiven k :

$$a = 5k \quad \text{in} \quad b = 12k$$

Izračunajmo k iz zveze med diagonalo in stranicama:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= d^2 \\ (5k)^2 + (12k)^2 &= 52^2 \\ 25k^2 + 144k^2 &= 2704 \\ 169k^2 &= 2704 \quad / : 169 \\ k^2 &= 16 \\ k &= 4 \end{aligned}$$

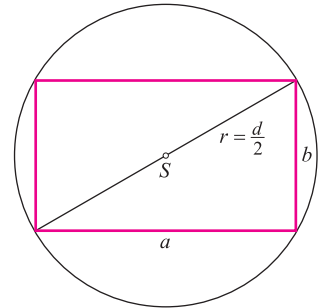
Upoštevali smo, da je k pozitiven. Tako imamo stranici:

$$a = 5k = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}$$

$$b = 12k = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}$$

Ploščina pravokotnika je:

$$S = ab = 20 \cdot 48 = 960 \text{ cm}^2$$



12. Pravokotniku s stranicama $a = 8$ cm in $b = 12$ cm povečamo stranico a za 20 %, stranico b pa za 10 %. Za koliko odstotkov se mu poveča obseg?

Rešitev: Obseg prvotnega pravokotnika je:

$$o = 2(a + b) = 2(8 + 12) = 40 \text{ cm}$$

Obseg povečanega pravokotnika je:

$$\begin{aligned} o_1 &= 2(a + a \cdot 20\% + b + b \cdot 10\%) = \\ &= 2(a + a \cdot 0\cdot2 + b + b \cdot 0\cdot1) = \\ &= 2(1\cdot2a + 1\cdot1b) = \\ &= 2(1\cdot2 \cdot 8 + 1\cdot1 \cdot 12) = 45\cdot6 \text{ cm} \end{aligned}$$

Da dobimo odstotek povečanja obsega, moramo novi obseg deliti s prvotnim:

$$\frac{o_1}{o} = \frac{45\cdot6}{40} = 1\cdot14$$

Iz gornjega preberemo, da se je obseg povečal za 14 %.

Rešitve

1. a) 2000 cm^2 b) 10 cm^2 c) 210 cm^2 d) $0\cdot4 \text{ cm}^2$ e) $50\,000 \text{ cm}^2$ f) $8\cdot2 \text{ cm}^2$
g) $20\cdot56 \text{ cm}^2$ h) 5 cm^2 i) 4000 cm^2 j) 3500 cm^2 k) $15 \cdot 10^5 \text{ cm}^2$
l) $0\cdot012 \text{ cm}^2$
2. a) 120 dm^2 b) $10\,000 \text{ dm}^2$ c) $0\cdot05 \text{ dm}^2$ d) $1\,250 \text{ dm}^2$ e) $0\cdot6 \text{ dm}^2$
f) $0\cdot006 \text{ dm}^2$ g) $2 \cdot 10^5 \text{ dm}^2$ h) $0\cdot001 \text{ dm}^2$ i) $2 \cdot 10^5 \text{ dm}^2$ j) $0\cdot01 \text{ dm}^2$
k) $2\,200 \text{ dm}^2$ l) 710 dm^2
3. a) 10^6 m^2 b) 70 m^2 c) 200 m^2 d) $6\cdot3 \text{ m}^2$ e) $5\cdot4 \text{ m}^2$ f) $30\,000 \text{ m}^2$
g) $0\cdot285413 \text{ m}^2$ h) $0\cdot16 \text{ m}^2$ i) $2\,800 \text{ m}^2$ j) 50 m^2 k) $4\cdot8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$
l) 300 m^2
4. a) $o = 8 \text{ m}, S = 4 \text{ m}^2$ b) $o = 48 \text{ cm}, S = 108 \text{ cm}^2$ c) $o = 103\cdot4 \text{ m}, S = 624 \text{ m}^2$
d) $o = 7 \text{ dm}, S = 3 \text{ dm}^2$ e) $o = 26 \text{ mm}, S = 30 \text{ mm}^2$ f) $o = \frac{35}{6} \text{ m}, S = \frac{3}{2} \text{ m}^2$
5. a) $o = 8\cdot60 \text{ m}, S = 4\cdot62 \text{ m}^2$ b) $o = 32\cdot7 \text{ dm}, S = 66\cdot7 \text{ dm}^2$
c) $o = 349 \text{ cm}, S = 7\,620 \text{ cm}^2$
6. a) 38 cm^2 b) 32 cm^2 c) 680 cm^2 d) 124 cm^2 e) 28 cm^2 f) $0\cdot54 \text{ cm}^2$
7. a) 15 m b) 8 cm c) $2\cdot1 \text{ dm}$ d) $\sqrt{2} \text{ m}$ e) $\frac{12}{5} \text{ cm}$ f) 2 dm
8. a) 9 m^2 b) $0\cdot25 \text{ cm}^2$ c) $0\cdot5 \text{ cm}^2$ d) $11\cdot56 \text{ km}^2$ e) 1 dm^2 f) $7\cdot84 \text{ cm}^2$
9. a) 5 m b) $5\cdot94 \text{ cm}$ c) $2\cdot5 \text{ cm}$ d) $6\cdot98 \text{ m}$ e) $16\cdot97 \text{ m}$ f) $23\cdot97 \text{ dm}$
10. a) $59^\circ 2'$ b) 60° c) $40^\circ 54'$ d) 45° e) $84^\circ 16'$ f) $21^\circ 6'$
11. a) 8 cm b) $2\cdot54 \text{ dm}$ c) $37\cdot86 \text{ cm}$ d) $17\cdot01 \text{ dm}$ e) $21\cdot77 \text{ cm}$ f) $33\cdot52 \text{ m}$
12. $1\,694 \text{ €}$ 13. $2 \text{ min } 44 \text{ s}$ 14. $6\cdot8 \text{ m} \times 6\cdot8 \text{ m}$ 15. 462 16. 10 m
17. a) $44\,200 \text{ m}^2$ b) $45\,000 \text{ m}^2$ c) $46\,225 \text{ m}^2$ d) $29\,584 \text{ m}^2$ e) $46\,200 \text{ m}^2$
18. a) 680 cm b) 408 cm c) $1\,258 \text{ cm}$ d) $424\cdot08 \text{ cm}$ e) 442 m
19. a) $20 \text{ cm in } 6 \text{ cm}$ b) $10 \text{ cm in } 12 \text{ cm}$ c) $7\cdot75 \text{ cm in } 15\cdot49 \text{ cm}$
d) $26\cdot83 \text{ cm in } 4\cdot47 \text{ cm}$
20. 48 m^2
21. $66\cdot7\%$
22. Ploščina se mu poveča za $26\cdot5\%$, obseg pa za 14% .
23. a) $\frac{17a^2}{25}$ b) $\frac{4a^2}{9}$ c) $\frac{9a^2}{17}$
24. a) 200 dm^2 b) $5\cdot4 \text{ m}^2$ c) $33\cdot75 \text{ cm}^2$ d) $15\cdot3 \text{ m}^2$ e) 6 cm^2 f) $0\cdot12 \text{ m}^2$
25. a) $o = 20 \text{ cm}, S = 12 \text{ cm}^2$ b) $o = 106 \text{ cm}, S = 581\cdot97 \text{ cm}^2$
c) $o = 6 \text{ dm}, S = 0\cdot72 \text{ dm}^2$ d) $o = 8 \text{ m}, S = 3\cdot46 \text{ m}^2$
e) $o = 84 \text{ cm}, S = 297\cdot94 \text{ cm}^2$ f) $o = 114\cdot8 \text{ cm}, S = 729\cdot14 \text{ cm}^2$
26. a) 12 cm^2 b) 38 cm^2 c) 7 cm^2 d) 12 cm^2 e) 20 cm^2 f) 13 cm^2
27. a) $32\cdot8 \text{ cm}^2$ b) $46\cdot0 \text{ cm}^2$ c) $45\cdot1 \text{ cm}^2$ d) $27\cdot4 \text{ cm}^2$
28. a) $o = 20 \text{ cm}, S = 24 \text{ cm}^2$ b) $o = 104 \text{ m}, S = 480 \text{ m}^2$
29. a) $144\cdot0 \text{ cm}^2$ b) $58\cdot7 \text{ cm}^2$
30. $v_a = 8 \text{ m}, v_b = 6 \text{ m}$