Roman Brilej, Boro Nikič

alfa

Polinomi in racionalne funkcije

Zbirka nalog za matematiko v
srednjem strokovnem izobraževanju

Ljubljana 2011

Kazalo

1 Polinomi **5**
1.1 Definicija polinoma, seštevanje in množenje . . . 6
1.2 Deljenje polinomov . . . 12
1.3 Ničle polinoma . . . 17
1.4 Hornerjev algoritem . . . 24
1.5 Iskanje ničel . . . 30
1.6 Graf polinoma . . . 35
1.7 Neenačbe višjih stopenj . . . 42
1.8 Naloge za ponavljanje . . . 46

1 Racionalne funkcije **49**
2.1 Definicija in osnovne lastnosti racionalnih funkcij . . . 50
2.2 Graf racionalne funkcije . . . 53
2.3 Racionalne enačbe in neenačbe . . . 64
2.4 Naloge za ponavljanje . . . 73

Rešitve **75**

1.1 Definicija polinoma, seštevanje in množenje

Polinom p je realna funkcija oblike:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Realna števila $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ so koeficienti polinoma.

Pri tem je $a_n \neq 0$, razen v primeru, ko so vsi koeficienti enaki 0 (ničelni polinom). Koeficient a_n imenujemo **vodilni koeficient**, člen $a_n x^n$ pa **vodilni člen**. Koeficient a_0 je **prosti koeficient** ali **prosti člen**. Število n je **stopnja** polinoma. Označimo jo s $\mathrm{st}(p)$.

Dva polinoma sta **enaka**, če sta enake stopnje in se ujemata v istoležnih koeficientih (pri potencah iste stopnje).

Vsota $p+q$ polinomov p in q je polinom, katerega koeficienti so vsote istoležnih koeficientov polinomov p in q. **Razlika** $p-q$ polinomov p in q je polinom, katerega koeficienti so razlike istoležnih koeficientov polinomov p in q. Tako pri vsoti kot pri razliki smemo v primeru, da nek polinom nima člena določene stopnje, za ustrezni koeficient vzeti 0.

Produkt pq polinomov p in q je polinom, ki ga dobimo, če polinoma p in q zmnožimo kot veččlenika. Vodilni člen produkta je enak produktu vodilnih členov posameznih faktorjev. Stopnja produkta je enaka vsoti stopenj posameznih faktorjev. Prosti člen produkta je enak produktu prostih členov posameznih faktorjev.

Zgledi

1. Ali je funkcija $f(x) = 2x^2 + x^{\frac{1}{2}} - 3$ polinom?
Rešitev: Polinom je realna funkcija oblike:

$$\boxed{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

Spremenljivka x nastopa le v obliki potenc z naravnim eksponentom. Ker ima dana funkcija f potenco z racionalnim eksponentom, ta funkcija ni polinom.

2. Dan je polinom $p(x) = \sqrt{3}x^4 - 2x^2 + 7x - 4$. Določi stopnjo, vodilni koeficient, vodilni člen in prosti člen tega polinoma.
Rešitev: Vodilni člen polinoma je enočlenik z največjim eksponentom pri spremenljivki x. V našem primeru je to $\sqrt{3}x^4$.
Vodilni koeficient je koeficient vodilnega člena, torej $\sqrt{3}$.
Stopnja polinoma je enaka eksponentu pri spremenljivki x vodilnega člena, v našem primeru je:

$$st(p) = 4$$

Prosti člen je tisti, ki ne vsebuje spremenljivke x. V našem primeru je to -4.

3. Dana sta polinoma $p(x) = -3x^4 + 2x^2 - 1$ in $q(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2$. Določi vsoto teh polinomov.
Rešitev: Polinome seštejemo, kot smo to že počeli pri veččlenikih. Seštejemo lahko člene iste stopnje:

$$p(x) + q(x) = -4x^3 + 3x^2 - 1$$

Pri tem opazimo, da se vodilna člena obeh polinomov pri seštevanju izničita, saj velja:

$$-3x^4 + 3x^4 = 0$$

4. Za polinoma $p(x) = 2x^3 - x$ in $q(x) = x^2 - 0{\cdot}5x - 2$ izračunaj $p(x) - 2q(x)$.
Rešitev: Računajmo, kot smo vajeni pri veččlenikih:

$$\begin{aligned} p(x) - 2q(x) &= 2x^3 - x - 2(x^2 - 0{\cdot}5x - 2) = \\ &= 2x^3 - x - 2x^2 + x + 4 = 2x^3 - 2x^2 + 4 \end{aligned}$$

5. Izračunaj produkt polinomov $p(x) = 2x^3 + 1$ in $q(x) = -3x^2 + x$.
Rešitev: Pri množenju vsak člen množimo z vsakim:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (2x^3 + 1)(-3x^2 + x) = \\ &= 2x^3 \cdot (-3x^2) + 2x^3 \cdot x + 1 \cdot (-3x^2) + 1 \cdot x = \\ &= -6x^5 + 2x^4 - 3x^2 + x \end{aligned}$$

6. Dan je polinom $p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 7x - 5$. Določi vodilni člen polinoma $(p(x))^3$.
Rešitev: Za določitev vodilnega člena kuba polinoma $p(x)$ nam seveda ni potrebno določiti ves polinom $(p(x))^3$. Očitno vodilni člen tega polinoma dobimo tako, da vodilni člen polinoma $p(x)$ potenciramo:

$$(2x^4)^3 = 2^3 x^{12} = 8x^{12}$$

7. Določi taka števila A, B in C, da bo za vsak x veljalo:

$$2x^2 - 5x + 2 = (Ax + B)(x - 1) + C$$

Rešitev: Če naj gornja enakost velja za vsak x, potem to ne pomeni nič drugega, kot da sta polinoma na levi in desni strani zgornje enačbe enaka. Polinoma pa sta enaka natanko tedaj, ko se ujemata v vseh koeficientih. Zato najprej polinom na desni strani uredimo:

$$\begin{aligned} (Ax + B)(x - 1) + C &= Ax^2 - Ax + Bx - B + C = \\ &= Ax^2 + (-A + B)x - B + C \end{aligned}$$

Sedaj izenačimo koeficiente tega polinoma s koeficienti polinoma na levi strani enačbe:

$$\begin{aligned} A &= 2 \\ -A + B &= -5 \\ -B + C &= 2 \end{aligned}$$

Dobili smo sistem treh enačb s tremi neznankami. Prva enačba nam že kar določa število A. Le-to vstavimo v drugo enačbo:

$$\begin{aligned} -2+B &= -5 \\ B &= -3 \end{aligned}$$

Sedaj to uporabimo v tretji enačbi:

$$\begin{aligned} -(-3)+C &= 2 \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Tako smo torej dobili $A = 2$, $B = -3$ in $C = -1$.

8. Določi polinom druge stopnje, za katerega je $p(1) = 3$, $p(-1) = 1$ in $p(2) = -5$.
Rešitev: Poljuben polinom druge stopnje lahko zapišemo v obliki:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Zapovrstjo vstavimo $x = 1$, -1 in 2:

$p(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$
$p(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c$
$p(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$

Upoštevajmo dane vrednosti polinoma v teh točkah in dobimo sistem treh enačb s tremi neznankami:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 3 \\ a-b+c &= 1 \\ 4a+2b+c &= -5 \end{aligned}$$

Od prve enačbe odštejmo drugo:

$$\begin{aligned} 2b &= 2 \quad /:2 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Sedaj vstavimo $b = 1$ v prvo in tretjo enačbo:

$$\begin{aligned} a+1+c &= 3 \\ 4a+2\cdot 1+c &= -5 \end{aligned}$$

Enačbi uredimo:

$$\begin{aligned} a+c &= 2 \\ 4a+c &= -7 \end{aligned}$$

Od druge enačbe odštejmo prvo:

$$\begin{aligned} 3a &= -9 \quad /:3 \\ a &= -3 \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo $a+c=2$:

$$\begin{aligned} -3+c &= 2 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

Tako smo dobili vse koeficiente iskanega polinoma: $a=-3$, $b=1$, $c=5$. Torej je:

$$p(x) = -3x^2 + x + 5$$

Naloge

1. Za dano funkcijo ugotovi, ali je polinom:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$
b) $f(x) = -3x^2 - x - 2$
c) $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 3x$
d) $f(x) = -5x^3 + 2x + 1$
e) $f(x) = 6x^7 + 5x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$
f) $f(x) = 2x^{-3}$
g) $f(x) = 2x^{-4} + 3x^{-3} - 2x^{-1} - 4$
h) $f(x) = -3x^{111} - 7$
i) $f(x) = \log_2 x$
j) $f(x) = \log^3 x + \log^2 x - \log x - 1$
k) $f(x) = -3$
l) $f(x) = 5x + 1$
m) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$
n) $f(x) = \sqrt{5}x^3 + \sqrt{2}x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt{5}$
o) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} - 2$
p) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - x^4$

2. Določi stopnjo, vodilni koeficient, vodilni člen in prosti člen polinoma $p(x) =$:

a) $5x^2 + 2x - 3$
b) $-2x^2 - x + 7$
c) $4x^3 + 3x^2 - 5x + 1$
d) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$
e) $-x^4 + 2x^2 + 2$
f) $2x^4 + x^3 - x^2 + 4x$
g) $x^8 + 2x^5 - 11x^3 - x$
h) $4x - 1$
i) $-x^4$
j) 2
k) $3x^2 + 1 - x^4$
l) $2x + 2x^6$
m) $-\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x + 4$
n) $-x^5 + x^2 - 3x - \frac{5}{2}$
o) $2{\cdot}25x^3 - 1{\cdot}5x + 0{\cdot}5$
p) $\sqrt{2}x^3$
r) $\sqrt{5}x^2 - 2x - \sqrt{2}$
s) $\sqrt[3]{1+\pi}x^4 - e^3x^3 + \pi^2x^2 + 2e$

3. Določi stopnjo, vodilni koeficient, vodilni člen in prosti člen polinoma $p(x) =$:

a) $p(x) = x^3(x-2)$
b) $p(x) = (x+3)(x-2)(1-x)$
c) $p(x) = -3(x+1)^2(x-1)$
d) $p(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (2x-1)(x+1)$

4. Seštej polinoma:

a) $x^3 + 2x$ in $x^2 + 3x + 1$
b) $2x^3 + x^2 - 2$ in $x^4 - 2x^2 + 4x$
c) $x^3 - 2$ in $x + 4$
d) $-3x^4 + 2x^2$ in $2x^3 + 5x - 1$
e) $x^2 + 3x + 1$ in $x^2 + x - 2$
f) $-x^2 + 4x - 3$ in $x^2 - 2x - 2$
g) $2x^3 + 4x^2 - 1$ in $-5x^3 + 6x$
h) $6x^7 + 4x^3 + 2x$ in $5x^3 + 2x^2 - 4$

i) $5x^4 - 3x^3 + 2x - 4$ in $-5x^4 + 2x^3 + 6x^2$

j) $5x^7 + 3x^6 - 2x^2 + 1$ in $-3x^6 + 2x^2 - 1$

k) $x^4 + x^2 + 1$ in $-x^3 - x$

l) $-2x^6 + 4x^3 - 2$ in $2x^6 - 4x^3 + 5$

m) $4x^4 - 2x^2 - 5x$ in $-4x^4 + 2x^2 + 5x$

n) $\frac{1}{2}x^3 + 4x - \frac{7}{3}$ in $\frac{1}{2}x^3 + 6x^2 + \frac{1}{3}$

o) $5x^5 + 4x^3 + \frac{7}{5}x$ in $-2x^4 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$

p) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$ in $2x^3 - \frac{3}{4}$

r) $\frac{3}{2}x^3 + 2x - \frac{1}{3}$ in $-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$

s) $4x^8 + \frac{2}{7}x^6 + 8x^3 - \frac{1}{3}x + 4$ in $\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{5}x$

t) $2\sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^2 - \sqrt{7}$ in $-3\sqrt{2}x^3 + \sqrt{5}x$

u) $\sqrt{3}x^5 + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + 2$ in $x^4 + x^3 - 4\sqrt{3}x$

5. Odštej polinoma:

a) $2x^3 + 3x$ in $x^2 + x - 3$

b) $2x^3 + x^2 - 2$ in $x^4 - 2x^2 + 4x$

c) $2x^3 - 1$ in $x + 3$

d) $-x^4 + 2x^2$ in $4x^3 + 5x - 1$

e) $x^2 + 3x + 1$ in $-x^2 + x - 2$

f) $x^2 + 4x - 3$ in $x^2 - 2x - 2$

g) $2x^3 + 4x^2 - 1$ in $-5x^3 + 5x$

h) $3x^7 - 3x^6 + 2x^2$ in $-3x^6 + 2x^2$

i) $-5x^4 + 3x^3 + 2x - 4$ in $-5x^4 + 2x^3 - 6x^2$

j) $6x^7 + x^3 + 2x$ in $5x^3 + 2x^2 - 4$

k) $x^4 + x^2 + 1$ in $-x^3 - x$

l) $-4x^6 + 8x^3 + 2x$ in $-4x^6 + 2x$

m) $4x^4 - 2x^2 - 5x$ in $-4x^4 + 2x^2 + 5x$

n) $\frac{3}{2}x^3 + 6x - \frac{7}{3}$ in $\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + \frac{2}{3}$

o) $3x^5 + 4x^3 - \frac{6}{5}x$ in $-2x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{5}x$

p) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{5}x$ in $2x^3 - \frac{3}{4}$

r) $\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{3}$ in $-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{6}$

s) $3x^{10} + 2x^7 - x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4x$ in $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 7$

t) $2\sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^2 - \sqrt{7}$ in $-3\sqrt{2}x^3 + \sqrt{5}x$

u) $\sqrt{3}x^5 + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + 2$ in $x^4 + \sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{3}x - 5$

6. Dani so polinomi $p(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x + 6$, $q(x) = 2x^4 - 2x^2 - x - 1$ in $r(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 4$. Izračunaj:

a) $p(x) + q(x)$

b) $p(x) + r(x)$

c) $q(x) - r(x)$

d) $p(x) - r(x)$

e) $p(x) + r(x) + q(x)$

f) $p(x) - r(x) - q(x)$

g) $2 \cdot p(x) - q(x)$

h) $q(x) + 4 \cdot r(x)$

i) $2 \cdot r(x) - 3 \cdot p(x)$

j) $4 \cdot p(x) - 2 \cdot q(x)$

k) $q(x) - (2 \cdot p(x) - 2r(x))$

l) $5 \cdot p(x) - (3 \cdot r(x) - 2q(x))$

7. Izračunaj produkt polinomov:

a) $2x^2 - 3x + 1$ in $x - 2$

b) $-3x^2 + x - 4$ in $x + 2$

c) $2x^2 - 1$ in $3x$

d) $x^3 + 2x^2$ in $x^2 + 4x - 1$

e) $x^4 - 2x^3 + 4$ in $-x + 3$

f) $2x^2 + 4x - 1$ in $-2x^2 + 4x + 3$

g) $-x^3 + 2x^2 - x$ in $x^2 - 6x + 1$

h) $x^3 + 2x$ in $x^4 - 2x^2 - 1$

i) $x^5 - x^2$ in $x^5 + x^2$ **j)** $x^6 - 1$ in $x^6 + 1$

k) $x + 5$ in $x^2 - 5x + 25$ **l)** $x - 6$ in $x^2 + 6x + 36$

m) $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^2 - 1$ in $8x^2 + 4x - 12$ **n)** $3x^2 + 12x$ in $x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}$

o) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$ in $3x^4 - \frac{1}{4}x^2 + 2x$ **p)** $\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ in $-\frac{3}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^3$

r) $-x^6 + 2x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 2x$ in $2x^2 + 4$

s) $x^3 - 1$ in $x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ **t)** $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}$ in $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{6}$

u) $\sqrt{5}x^3 + 2\sqrt{2}x - 1$ in $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{10}x + 1$

8. Naj bo $p(x) = -3x^2 + x - 2$ in $q(x) = x + 1$. Določi stopnjo, vodilni koeficient, vodilni člen in prosti člen polinoma:

a) $p(x) + q(x)$ **b)** $p(x) - q(x)$ **c)** $q(x) - p(x)$ **d)** $3p(x) + 2q(x)$

e) $p(x) + 3x \cdot q(x)$ **f)** $p(x) \cdot q(x)$ **g)** $(p(x))^2$ **h)** $(q(x))^2$

i) $(q(x))^3$ **j)** $-2 \cdot p(x) - 4(q(x))^3$

9. Določi taki števili A in B, da bo:

a) $2x + 2 = A(x + 3) + B$ **b)** $3x - 1 = A(x - 1) + B$

c) $-\frac{1}{2}x + 4 = A(x + 1) + Bx$ **d)** $-x + 3 = A(x + 3) + B(x + 1)$

e) $x = Ax + B(2x - 3)$ **f)** $-9 = A(2x - 1) + B(5x + 2)$

10. Določi taka števila A, B in C, da bo:

a) $2x^2 + 3x - 11 = Ax^2 + B(x - 4) + C$

b) $-2x^2 + 4x + 2 = A(2x^2 + 1) + Bx + C$

c) $x - 2 = (Ax + B)(x + 2) + Cx(x + 1)$

d) $2x^2 + 2x = (Ax + B)(x - 1) + Cx + 2B - 1$

e) $6x^2 - 5x - 2 = (Ax + B)(2x - 1) + (Bx + C)(x + 1)$

f) $-x^2 - x - 1 = B(x^2 + 1) + (Ax + C)(x - 1)$

11. Izračunaj vrednost polinoma p v danih točkah:

a) $p(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$; $x = 0, -1, 1, 2$

b) $p(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x - 1$; $x = 0, -1, -2, \sqrt{3}$

c) $p(x) = \frac{1}{2}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$; $x = -1, 1, 2, \frac{1}{2}$

d) $p(x) = 2x^4 - 6x^2 - 3x + 1$; $x = -2, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \sqrt{2}$

12. Določi polinom druge stopnje, če veš, da je:

a) $p(1) = 2, p(-1) = -6, p(0) = -3$ **b)** $p(1) = -6, p(4) = 0, p(0) = -4$

c) $p(2) = 2, p(-1) = \frac{7}{2}, p(0) = 1$ **d)** $p(-1) = 9, p(1) = 1, p(2) = 3$

e) $p(1) = 2, p(-2) = -10, p(2) = -6$ **f)** $p(3) = 6, p(-6) = 15, p(2) = \frac{13}{3}$

***13.** Določi polinom tretje stopnje, če veš, da je:

a) $p(1) = 1, p(-1) = 1, p(2) = 1, p(0) = -1$

b) $p(1) = -3, p(2) = 11, p(3) = 49, p(0) = -5$

14. Določi polinom druge stopnje z vodilnim koeficientom -1, prostim členom 2 in vsoto koeficientov 5.

$*$15. Določi polinom tretje stopnje, pri katerem je vodilni koeficient dvakrat večji od prostega člena, vsota koeficientov 5 ter $p(0) = 2$ in $p(-1) = 3$.

1.2 Deljenje polinomov

Za poljubna polinoma p in $q \neq 0$ obstajata enolično določena polinoma k in r, tako da velja:

$$p(x) = k(x)q(x) + r(x) \qquad \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(q) \text{ ali } r = 0$$

To trditev imenujemo **osnovni izrek o deljenju polinomov**. Polinom k imenujemo **kvocient** (količnik), polinom r pa **ostanek** pri deljenju polinoma p s polinomom q. Pri tem je polinom p **deljenec** in polinom q **delitelj**.

Polinom p je **deljiv** s polinomom q (polinom q deli polinom p), če je ostanek pri deljenju polinoma p s polinomom q enak ničelnemu polinomu.

Zgledi

1. Deli polinom $p(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 2$ s polinomom $q(x) = x^2 - 2x + 3$.
Rešitev: Zapišimo oba polinoma v vrsto in pričnimo z deljenjem. Ker polinom $p(x)$ nima linearnega člena, na tistem mestu pustimo nekaj prostora zaradi lažjega podpisovanja.

$$(x^4 - x^3 - x^2 \qquad - 2) : (x^2 - 2x + 3) =$$

Sedaj prvi člen prvega polinoma (deljenca) delimo s prvim členom drugega polinoma (delitelja) in rezultat zapišimo takoj za enačaj. Očitno je:

$$x^4 : x^2 = x^2$$

Tako imamo:

$$(x^4 - x^3 - x^2 \qquad - 2) : (x^2 - 2x + 3) = x^2$$

Nato drugi polinom pomnožimo z x^2 in rezultat podpišimo pod prvi polinom:

$$\begin{array}{rrrrcccc} (x^4 & -x^3 & -x^2 & -2) & : & (x^2 - 2x + 3) & = & x^2 \\ x^4 & -2x^3 & +3x^2 & & & & & \end{array}$$

Od zgornjega polinoma odštejmo spodnji polinom:

$$\begin{array}{rrrrcccc} (x^4 & -x^3 & -x^2 & -2) & : & (x^2 - 2x + 3) & = & x^2 \\ -(x^4 & -2x^3 & +3x^2) & & & & & \\ \hline & x^3 & -4x^2 & -2 & & & & \end{array}$$

Sedaj zgodbo ponovimo z dobljenim polinomom. Vodilni člen delimo z vodilnim členom drugega polinoma:

$$x^3 : x^2 = x$$

Rezultat pripišimo na desno stran, nato pa s tem členom množimo drugi polinom ter rezultat podpišemo, nato pa ga odštejemo:

$$\begin{array}{rrrrrcccc}
(x^4 & -x^3 & -x^2 & & -2) & : & (x^2-2x+3) & = & x^2+x \\
-(x^4 & -2x^3 & +3x^2) & & & & & & \\
\hline
& x^3 & -4x^2 & & -2 & & & & \\
& -(x^3 & -2x^2 & +3x) & & & & & \\
\cline{2-5}
& & -2x^2 & -3x & -2 & & & &
\end{array}$$

Končno naredimo še zadnji korak. Vodilni člen spodnjega polinoma delimo z x^2:

$$-2x^2 : x^2 = -2$$

Rezultat zapišimo na desno, ga pomnožimo z drugim polinomom, podpišemo in odštejemo:

$$\begin{array}{rrrrrcccc}
(x^4 & -x^3 & -x^2 & & -2) & : & (x^2-2x+3) & = & x^2+x-2 \\
-(x^4 & -2x^3 & +3x^2) & & & & & & \\
\hline
& x^3 & -4x^2 & & -2 & & & & \\
& -(x^3 & -2x^2 & +3x) & & & & & \\
\cline{2-5}
& & -2x^2 & -3x & -2 & & & & \\
& & -(-2x^2 & +4x & -6) & & & & \\
\cline{3-5}
& & & -7x & +4 & & & &
\end{array}$$

Tukaj se deljenje ustavi, saj je stopnja polinoma $r(x) = -7x + 4$ manjša od stopnje polinoma, s katerim delimo. Polinomu $r(x)$ pravimo ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ s $q(x)$, polinom:

$$k(x) = x^2 + x - 2$$

pa je količnik. Očitno velja zveza:

$$p(x) = k(x)q(x) + r(x)$$

2. Ugotovi, ali je polinom $p(x) = x^4 - 8x^2 + 9x + 2$ deljiv s polinomom $q(x) = x - 2$.
Rešitev: Polinom p je deljiv s polinomom q, če je ostanek pri deljenju polinoma p s polinomom q enak 0. Torej polinom p delimo s polinomom q. Deljenje

Rešitve

1. **a)** Da. **b)** Da. **c)** Da. **d)** Da. **e)** Da. **f)** Ne. **g)** Ne. **h)** Da.
i) Ne. **j)** Ne. **k)** Da. **l)** Da. **m)** Ne. **n)** Da. **o)** Ne. **p)** Da.

2.

	Stopnja	**Vodilni koeficient**	**Vodilni člen**	**Prosti člen**
a)	2	5	$5x^2$	-3
b)	2	-2	$-2x^2$	7
c)	3	4	$4x^3$	1
d)	3	1	x^3	-1
e)	4	-1	$-x^4$	2
f)	4	2	$2x^4$	0
g)	8	1	x^8	0
h)	1	4	$4x$	-1
i)	4	-1	$-x^4$	0
j)	0	2	2	2
k)	4	-1	$-x^4$	1
l)	6	2	$2x^6$	0
m)	4	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}x^4$	4
n)	5	-1	$-x^5$	$-\frac{5}{2}$
o)	3	$2{\cdot}25$	$2{\cdot}25x^3$	$0{\cdot}5$
p)	3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}x^3$	0
r)	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}x^2$	$-\sqrt{2}$
s)	4	$\sqrt[3]{1+\pi}$	$\sqrt[3]{1+\pi}x^4$	$2e$

3. **a)** Stopnja 4, vodilni koeficient 1,vodilni člen x^4, prosti člen 0.
b) Stopnja 3, vodilni koeficient -1,vodilni člen $-x^3$, prosti člen -6.
c) Stopnja 3, vodilni koeficient -3,vodilni člen $-3x^3$, prosti člen 3.
d) Stopnja 4, vodilni koeficient 2,vodilni člen $2x^4$, prosti člen $-\dfrac{1}{4}$.

4. **a)** x^3+x^2+5x+1 **b)** $x^4+2x^3-x^2+4x-2$ **c)** x^3+x+2 **d)** $-3x^4+2x^3+2x^2+5x-1$
e) $2x^2+4x-1$ **f)** $2x-5$ **g)** $-3x^3+4x^2+6x-1$ **h)** $6x^7+9x^3+2x^2+2x-4$
i) $-x^3+6x^2+2x-4$ **j)** $5x^7$ **k)** $x^4-x^3+x^2-x+1$ **l)** 3 **m)** 0
n) x^3+6x^2+4x-2 **o)** $5x^5-2x^4+4x^3+2x-\dfrac{1}{2}$ **p)** $2x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{3}{4}$
r) $\dfrac{7}{6}x^3+2x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$ **s)** $4x^8+\dfrac{2}{7}x^6+\dfrac{26}{3}x^3+x^2-\dfrac{2}{15}x+4$
t) $-\sqrt{2}x^3-\sqrt{3}x^2+\sqrt{5}x-\sqrt{7}$ **u)** $\sqrt{3}x^5+x^4+x^3+2\sqrt{2}x^2-5\sqrt{3}x+2$

5. **a)** $2x^3-x^2+2x+3$ **b)** $-x^4+2x^3+3x^2-4x-2$ **c)** $2x^3-x-4$
d) $-x^4-4x^3+2x^2-5x+1$ **e)** $2x^2+2x+3$ **f)** $6x-1$ **g)** $-7x^3+4x^2-5x-1$
h) $3x^7$ **i)** x^3+6x^2+2x-4 **j)** $6x^7-4x^3-2x^2+2x+4$ **k)** $x^4+x^3+x^2+x+1$
l) $8x^3$ **m)** $8x^4-4x^2-10x$ **n)** x^3-4x^2+6x-3 **o)** $3x^5+2x^4+4x^3-\dfrac{5}{2}x^2-x$
p) $-2x^3+\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{3}{4}$ **r)** $\dfrac{11}{6}x^3-2x^2+\dfrac{5}{2}x-\dfrac{7}{6}$ **s)** $3x^{10}+2x^7-\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{5}{6}x^2+4x+7$
t) $5\sqrt{2}x^3-\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x-\sqrt{7}$ **u)** $\sqrt{3}x^5-x^4+\sqrt{2}x^2+3\sqrt{3}x+7$