Roman Brilej, Boro Nikič, Rudi Seljak

OMEGA 4

Kombinatorika, verjetnostni račun, statistika

Zbirka nalog za matematiko v 4. letniku gimnazijskega izobraževanja

Ljubljana 2013

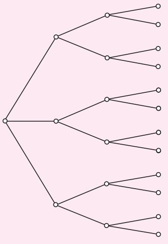
Kazalo

1.1 Osnovni izrek kombinatorike

Naj proces odločanja poteka v k zaporednih fazah. V prvi fazi naj bo n_1 izborov (možnih odločitev), v drugi n_2 ... in v k-ti n_k izborov. **Število** izborov v posamezni fazi naj bo **neodvisno** od posameznih izborov v predhodnih fazah. Potem **osnovni izrek kombinatorike** pravi, da je število vseh (sestavljenih) izborov v tem procesu:

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Kombinatorično drevo je shema, s katero prikažemo proces odločanja. Pogosto drevo obrnemo tako, da 'raste' iz leve proti desni. Posamezni sestavljeni izbor je pot od začetne točke drevesa do končne točke. Število izborov v procesu je enako številu 'listov' (končnih točk) drevesa.



Na voljo naj imamo k množic izborov. Iz prve množice naj bo n_1 izborov, iz druge n_2 ... in iz k-te n_k izborov. Izbori iz posamezne množice naj bodo **nezdružljivi** z izbori iz drugih množic. Potem je po **pravilu vsote** število vseh možnih izborov:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

1. Zajtrk gospoda Mrcine vsak dan sestavljajo kruh, marmelada in sok. Danes ima na voljo: črni, beli in koruzni kruh, marelično, jagodno in ribezovo marmelado, pomarančni in borovničev sok. S pomočjo kombinatoričnega drevesa preštej, koliko različnih zajtrkov lahko danes sestavi gospod Mrcina.

2. Gospod Bill Smith bi rad pripotoval iz Londona preko Pariza, Dunaja in Ljubljane v Idrijo. Za pot iz Londona v Pariz ima na voljo vlak in letalo, iz Pariza do Dunaja letalo, vlak in najeti avtomobil, iz Dunaja do Ljubljane vlak in letalo, iz Ljubljane do Idrije pa avtobus in taksi. S kombinatoričnim drevesom prikaži ter preštej, na koliko načinov si gospod Smith lahko organizira potovanje.

3. S pomočjo kombinatoričnega drevesa ugotovi, koliko različnih rezultatov lahko dobiš, če v kvadratke v računu $3 \square\, 5 \square\, 4 =$ vstaviš enega od operatorjev $+, -, \cdot$. Zapiši tudi vse dobljene rezultate.

4. S koliko različnimi zaporedji učnih uspehov lahko dijak v 4 letih naredi srednjo šolo?

5. Iz kraja A v kraj B vodi 10, iz kraja B v kraj C pa 6 različnih poti. Na koliko načinov lahko iz kraja A preko kraja B pridemo v kraj C, če:

- **a)** ni dodatnih omejitev
- **b)** sta dve izmed poti iz kraja A v kraj B zaprti
- **c)** hočemo iz kraja B v kraj C potovati po eni izmed dveh asfaltiranih poti

6. Neko ljudstvo ima v svoji abecedi le samoglasnika A in E ter soglasnike Č, Š, Ž.

a) Koliko različnih trimestnih besed lahko sestavijo?

b) Koliko trimestnih besed ima na prvem mestu soglasnik, na drugem samoglasnik ter na tretjem spet soglasnik?

c) Koliko trimestnih besed ima na prvem mestu soglasnik, na ostalih dveh pa samoglasnika?

d) Koliko različnih trimestnih besed ima na vseh treh mestih soglasnik?

7. Janez igra na igralnem avtomatu preprosto igro, kjer igralec stavi po 10 tolarjev, in v primeru, da dobi igro, pridobi dodatnih 10 tolarjev, v nasprotnem primeru pa izgubi vloženih 10 tolarjev. S pomočjo kombinatoričnega drevesa ugotovi, kakšni so možni izidi, če ima Janez v žepu le 10 tolarjev in igra največ štirikrat.

8. V restavraciji Krompir in ostalo je za predjed na voljo 10, za glavno jed 15 in za sladico 8 različnih jedi. Koliko različnih večerij si lahko privoščimo, če bomo:

a) jedli predjed, glavno jed in sladico

b) predjed preskočili

9. V treh škatlah imamo listke s črkami, na vsakem po eno črko. V prvi so 3 listki s črkami B, C, Č, v drugi 4 listki s črkami T, V, Z, Ž in v tretji 5 listkov s črkami A, E, I, O, U. Koliko trimestnih besed lahko sestavimo, če besede sestavljamo po vrstnem redu izbranih črk in izvlečemo:

a) po vrsti iz vsake škatle po en listek

b) brez vračanja dva listka iz prve ter nato še enega iz tretje škatle

c) vse tri listke (brez vračanja) iz tretje škatle

10. Trije igralci eden za drugim vržejo kocko. Zmaga tisti, ki vrže največje število pik. V primeru istega števila pik zmaga tisti, ki je metal zadnji. Izid igre je število vrženih pik pri vsakem od igralcev.

a) Koliko je vseh možnih izidov?

b) Koliko je izidov, kjer padejo samo liha števila pik?

c) Koliko je izidov, kjer zmaga prvi igralec, zadnji igralec pa vrže dve piki?

d) Koliko je izidov, kjer zmaga zadnji igralec?

11. Miha in Jože iz škatle, v kateri sta listka s številoma 2 in 7, povlečeta vsak svoj listek in ga vrneta v škatlo. V igri zmaga tisti, ki trikrat izvleče večje število kot nasprotnik.

a) S kombinatoričnim drevesom prikaži vse možne poteke igre.

b) V koliko od vseh možnih potekov zmaga Jože?

c) V koliko primerih zmaga Miha, če vemo, da je v prvih dveh poskusih potegnil obakrat 2?

12. V razredu, kjer je 10 fantov in 15 deklet, izbiramo predsednika in podpredsednika.

a) Koliko je vseh različnih možnosti izbora?

b) Koliko je možnosti, kjer sta predsednik in podpredsednik istega spola?

13. Košarkarski trener ima za vsako od 5 igralnih mest naslednji izbor igralcev:

Igralno mesto	**Igralci**
1 (organizator)	Zoran S., Jure Z., Jaka L.
2 (visoki branilec)	Dušan H., Boris G.
3 (krilo)	Matjaž T., Roman H.
4 (krilni center)	Matjaž S., Ivica J.
5 (center)	Slavko K., Rajko Ž., Mario K.

Na koliko načinov lahko sestavi začetno peterko, če:

a) ni dodatnih omejitev

b) je Jure Z. kapetan in mora igrati v začetni peterki

c) Slavka K. premestimo iz igralnega mesta 5 na igralno mesto 4

d) lahko trener kateregakoli igralca iz mesta 4 uporabi za mesto 5 in obratno

14. Sestri Maja in Špela imata v skupni garderobi 6 različnih kap ter 8 različnih klobukov. Na koliko različnih načinov lahko izbereta pokrivali, če:

a) si lahko obe na glavo posadita tako kapo kot klobuk

b) Maja izbere klobuk, Špela pa kapo

c) Špela izbere klobuk, Maja pa kapo

∗15. Kraji Mala vas, Srednja vas, Velika vas in Malo mesto ležijo ob isti cesti v takem vrstnem redu, kot so zapisani. Kraje povezujejo avtobusne linije, vendar le po dva sosednja kraja. Vozni red avtobusov je prikazan v spodnji tabeli:

Zač. postaja	**Kon. postaja**	**Odhod**	**Prihod**
Mala vas	Srednja vas	5^{00}, 8^{10}, 14^{15}, 20^{15}	6^{10}, 9^{40}, 15^{45}, 21^{30}
Srednja vas	Velika vas	6^{45}, 9^{00}, 12^{20}, 16^{00}, 22^{00}	7^{30}, 9^{50}, 13^{15}, 16^{45}, 22^{40}
Srednja vas	Mala vas	6^{20}, 9^{50}, 15^{55}, 21^{40}	7^{30}, 11^{00}, 17^{00}, 22^{45}
Velika vas	Srednja vas	7^{40}, 10^{00}, 13^{25}, 16^{55}, 22^{50}	8^{25}, 10^{50}, 14^{10}, 17^{30}, 23^{30}
Velika vas	Malo mesto	8^{30}, 11^{15}, 14^{15}	9^{00}, 11^{45}, 14^{45}
Malo mesto	Velika vas	9^{10}, 11^{55}, 14^{55}	9^{40}, 12^{25}, 15^{25}

Na koliko načinov lahko z najmanjšim številom prestopanj pridemo z avtobusom v istem dnevu:

a) iz Male vasi v Veliko vas

b) iz Malega mesta v Srednjo vas

c) iz Srednje vasi v Malo mesto, če poti ne začnemo pred 12.00

d) iz Malega mesta v Malo vas, če moramo v Malo vas prispeti pred 20.00

∗16. Koliko datumov, ki se nanašajo na čas med 1. 1. 1990 in 31. 12. 1999, lahko sestavimo s premetavanjem števk datuma 03. 12. 1999 (3. december 1999)?

17. Na srečanju dveh državniških delegacij se je vsak predstavnik države A rokoval z vsakim predstavnikom države B. Koliko predstavnikov je bilo v delegaciji države B, če je bilo v delegaciji države A 5 predstavnikov in je bilo vseh rokovanj 35?

***18.** Na teniških tekmah za Davisov pokal med dvema državnima reprezentancama odigrajo 5 dvobojev, in sicer 4 dvoboje posameznikov in 1 dvoboj dvojic. V vsaki reprezentanci imajo na voljo 5 igralcev. Vsak igralec nastopi največ v dveh posamičnih dvobojih. Na koliko načinov lahko kapetan pripravi seznam igralcev svoje reprezentance, če je važen vrstni red nastopajočih in:

a) ni dodatnih omejitev

b) v igri dvojic nastopa vsaj en igralec, ki ne igra v nobenem posamičnem dvoboju

***19.** V kocki $ABCDEFGH$ stojimo v oglišču A in bi s premikanjem po robovih kocke radi prišli do oglišča G. Na koliko različnih načinov lahko opravimo pot, če lahko vsak rob prehodimo samo enkrat in se lahko sprehodimo po največ:

a) 3 robovih **b)** 5 robovih

***20.** Koliko členov dobimo, če razčlenimo izraz $(a+1)(b+1)\cdot \ldots \cdot (z+1)$, pri čemer uporabimo vse črke angleške abecede?

***21.** Koliko je petčlenih aritmetičnih zaporedij s pozitivnimi celoštevilskimi členi, kjer:

a) sta prvi in zadnji člen manjša od 12

b) je absolutna vrednost diference večja od zadnjega člena, vsota vseh členov pa manjša od 36

***22.** V izločilnih tekmah nogometne lige prvakov igrata moštvi dve tekmi, na vsakem od domačih stadionov po eno. V naslednji krog napreduje tisto moštvo, ki je po doseženih golih uspešnejše v skupnem seštevku. Če je seštevek golov izenačen, napreduje moštvo, ki je doseglo več zadetkov v gosteh. Če sta moštvi izenačeni tudi po tem kriteriju, zmagovalca odloči izvajanje enajstmetrovk. Predpostavimo, da bodo na vsakem od dveh dvobojev doseženi največ štirje goli.

a) Koliko je vseh možnih izidov na obeh tekmah?

b) Koliko je izidov, kjer je skupni rezultat $3:3$?

c) Koliko je izidov, kjer se izvajajo enajstmetrovke?

***23.** V koordinatnem sistemu se po celoštevilski mreži sprehajamo po tistih točkah, pri katerih je absolutna vrednost posamezne koordinate manjša od 3. Sprehod traja lahko največ 5 korakov, skozi vsako točko pa gremo največ enkrat.

a) S kombinatoričnim drevesom prikaži vse možne poteke sprehoda od točke $T_0(0,0)$ do točke $T_1(2,2)$.

b) Koliko je različnih sprehodov iz točke $T_0(0,0)$ do točke $T_1(2,1)$, če se sprehajamo samo po točkah, ki imajo prvo koordinato večjo ali enako drugi koordinati?

c) Koliko je različnih sprehodov iz točke $T_0(-1,-1)$ do točke $T_1(1,1)$, če sta v vsakem koraku obe koordinati nove točke večji ali enaki istoležnim koordinatam prejšnje točke?

****24.** Koliko je vseh preslikav f iz množice $A=\{2^n;\ (n\in\mathbb{N})\wedge(n<6)\}$ v množico $B=\mathbb{N}$, za katere za vsak element $a\in A$ velja $f(a)<a$? Koliko od teh preslikav je injektivnih?

1.2 Permutacije

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definiramo število $n!$ (**n fakulteta**) kot produkt:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Po dogovoru je še:

$$0! = 1$$

Permutacije brez ponavljanja reda n so razporedi n različnih elementov v niz dolžine n. Njihovo število je enako:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Permutacije brez ponavljanja reda n lahko obravnavamo tudi kot bijektivne preslikave množice z n elementi nase. Zato je vseh takih bijektivnih preslikav $P_n = n!$.

Permutacije s ponavljanjem reda n so razporedi elementov v nize dolžine n, pri čemer lahko posamezni element nastopi večkrat (lahko se **ponovi**).

Naj v nizu dolžine n nastopa m elementov. Prvi naj se pojavi k_1-krat, drugi k_2-krat $\ldots$ in m-ti k_m-krat, pri čemer je:

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$$

Število permutacij s ponavljanjem je tako:

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

Permutacije brez ponavljanja

25. Izračunaj:

a) $\dfrac{6! - 5!}{4!}$ **b)** $\dfrac{7! \cdot 8! - 6! \cdot 9!}{5! \cdot 10!}$

c) $\dfrac{7! \cdot 4! + 9! \cdot 3! - 8! \cdot 3!}{2! \cdot 8!}$ **d)** $\left(\dfrac{4!}{2! \cdot 2!}\right)!$

∗26. Ugotovi, s koliko ničlami se konča število 100!.

27. Zapiši vse permutacije črk besede:

a) DA **b)** LAN **c)** MOKA

28. V prvi slovenski nogometni ligi je v sezoni 2003/2004 igralo 12 moštev. Koliko je bilo vseh možnih vrstnih redov ob koncu prvenstva?

29. Mama je za svojih 5 otrok kupila 5 različnih knjig. Na koliko načinov lahko razdeli knjige, če bo vsak od otrok dobil po 1 knjigo in:

a) ni dodatnih omejitev

b) mora najmlajši dobiti edino slikanico

c) mora najstarejši dobiti edino poljudnoznanstveno knjigo

d) bo med 2 najmlajša otroka razdelila 2 edini knjigi z otroškimi pesmimi

30. Na znanstveni konferenci s svojimi prispevki nastopajo štirje znanstveniki. Na koliko načinov lahko sestavimo vrstni red nastopajočih, če:

a) ni dodatnih omejitev

b) mora prvi nastopiti najstarejši znanstvenik

c) mora zadnji nastopiti najmlajši znanstvenik

d) edini znanstvenik z očali ne sme nastopiti pred edinim znanstvenikom iz ZDA

31. Koliko različnih petmestnih besed lahko sestavi Marko iz črk svojega imena, če lahko vsako črko uporabi samo enkrat in:

a) ni dodatnih omejitev

b) se morajo besede končati s črko O

c) se morajo besede začeti s črko M

d) se morajo besede končati s samoglasnikom

e) se morajo besede začeti s soglasnikom

32. Mojca se je odločila, da bo za vstopno geslo na svojem računalniku uporabila vse črke svojega imena. Koliko možnosti ima za sestavo gesla, če:

a) si ne postavlja dodatnih omejitev

b) samoglasnika ne smeta stati skupaj

33. Na koliko načinov lahko v vrsti stojijo štiri ženske in trije moški, če:

a) ni dodatnih omejitev

b) naj stojijo moški skupaj in ženske skupaj

c) morajo le ženske stati skupaj

$\ast$**d)** mora na prvem mestu stati eden od moških, ženske pa morajo stati skupaj

34. Na šolski proslavi moramo na odru v vrsto postaviti 5 učencev petega, 6 učencev šestega in 7 učencev sedmega razreda. Na koliko načinov lahko to storimo, če:

a) ni dodatnih omejitev

b) morajo učenci istega razreda stati skupaj

c) morajo na začetku vrste stati vsi učenci petega razreda

d) morajo na koncu vrste stati vsi učenci šestega razreda

e) Marko iz sedmega razreda ne sme stati na začetku vrste

35. Na klop bi radi posedli 4 Slovence, 3 Nemce in 5 Američanov. Na koliko načinov lahko to storimo, če:

a) ni dodatnih omejitev

b) morajo predstavniki istega naroda sedeti skupaj

c) morajo samo Nemci sedeti skupaj

d) ne smejo vsi Američani sedeti skupaj

$\ast$**e)** mora na prvem mestu sedeti eden od Nemcev, Slovenci pa morajo sedeti skupaj

36. Na klop bi radi posedli 5 pisateljev, 4 pesnike in 3 prevajalce. Na koliko načinov lahko to storimo, če

a) morajo ustvarjalci iz istega področja sedeti skupaj

b) morajo samo pesniki sedeti skupaj

c) pisatelji ne smejo sedeti vsi skupaj

d) mora na zadnjem mestu sedeti prevajalec

37. Koliko petmestnih števil z različnimi števkami lahko sestavimo iz števk 0, 2, 4, 6, 8, če moramo vsakič uporabiti vse števke in:

a) dovolimo tudi števko 0 na prvem mestu

b) na prvem mestu ne sme stati števka 0

c) mora biti 0 na zadnjem mestu

d) mora stati 2 na prvem mestu

e) števila ne smejo biti deljiva s 5

38. Na festivalu je 6 nastopajočih iz Slovenije, 5 iz Italije, 4 iz Hrvaške ter 2 iz Avstrije. Koliko je možnih vrstnih redov nastopajočih, če:

a) ni dodatnih omejitev

b) morajo predstavniki iste države nastopati zaporedoma

c) morajo najprej nastopiti vsi Italijani

d) mora najprej nastopiti najslavnejša slovenska pevka

39. Na polico v trgovini bi radi postavili 6 različnih navadnih, 5 različnih sadnih ter 7 različnih smetanovih jogurtov. Na koliko načinov lahko to storimo, če:

a) morajo istovrstni jogurti stati skupaj

b) navadni jogurti ne smejo stati vsi skupaj

c) mora na prvem mestu stati smetanov, na zadnjem pa sadni jogurt

d) morajo na prvih petih mestih stati sadni jogurti, na zadnjem mestu pa ne sme stati navadni jogurt

40. Na polico bi radi postavili 5 različnih mladinskih, 7 različnih pustolovskih ter 6 različnih zgodovinskih romanov. Na koliko načinov lahko to storimo, če:

a) morajo istovrstni romani stati skupaj

b) morajo skupaj stati tako zgodovinski kot tudi pustolovski romani

c) mora na prvem mestu stati pustolovski, na zadnjem pa mladinski roman

d) morajo na prvih sedmih mestih stati pustolovski romani, na zadnjem mestu pa ne sme stati zgodovinski roman

41. 8 tekmovalcev v finalu teka na 100 m bi radi porazdelili na 8 štartnih mest. Koliko je možnih porazdelitev, če:

a) ni dodatnih omejitev

b) mora najhitrejši iz predtekmovanja štartati na progi številka 4

c) trije finalisti iz ZDA ne smejo štartati vsi skupaj

d) mora vsaj 1 izmed 2 francoskih finalistov štartati na enem od prvih 6 mest

42. Darko se je odločil, da bo za letošnji dopust obiskal 4 države: Italijo, Avstrijo, Madžarsko in Hrvaško. Na koliko načinov lahko izbere vrstni red držav, če:

a) potuje z letali in zato lahko pripotuje iz katerekoli v katerokoli državo

b) potuje z avtomobilom, vsako državo bo obiskal natanko enkrat in med potovanjem ne bo obiskal nobene dodatne države

$\ast$43. Za okroglo mizo bi radi posedli 3 profesorje in 10 dijakov. Na koliko načinov lahko to naredimo, če:

a) ni dodatnih omejitev

b) najstarejši profesor sedi na vnaprej določenem stolu

c) ne smejo sedeti vsi profesorji skupaj

d) mora vseh 5 dijakov prvega letnika sedeti skupaj

$\ast$44. 3 plesalke z rdečimi pokrivali, 4 plesalke z modrimi pokrivali, 5 plesalcev s klobuki ter 2 plesalca brez klobuka plešejo kolo. Koliko je možnih porazdelitev v krogu, če:

a) ni dodatnih pogojev

b) vsakemu moškemu sledi ženska in obratno

c) moški brez klobuka ne stojijo skupaj

$\ast\ast$d) plesalke z enako barvo pokrival ne stojijo vse skupaj

45. Koliko je bijektivnih preslikav množice z 12 elementi same vase?

46. Dani sta množici $A = \{x;\ (x \in \mathbb{Z}) \wedge (-6 \leq x < 0)\}$ in $B = \{n;\ (n \in \mathbb{N}) \wedge (n|12)\}$. Naj bo $\mathcal{F}$ množica bijektivnih preslikav iz množice A v množico B.

a) Koliko elementov ima množica $\mathcal{F}$?

$\ast\ast$b) Za koliko funkcij iz množice $\mathcal{F}$ za vsaj en element $a \in A$ velja $f(a) = -a$?

47. Poiščite prvo in zadnjo permutacijo abecednega seznama vseh možnih permutacij črk P, A, Ž, I, C ,U.

$\ast$48. Poiščite 840. in 2897. permutacijo abecednega seznama vseh možnih permutacij črk R, E, K, A, B, O, N.

$\ast$49. Na katerem mestu v abecednem seznamu vseh permutacij črk dane besede je beseda:

a) KRUH **b)** ROKAV **c)** TRIGLAV

Permutacije s ponavljanjem

50. Izračunaj:

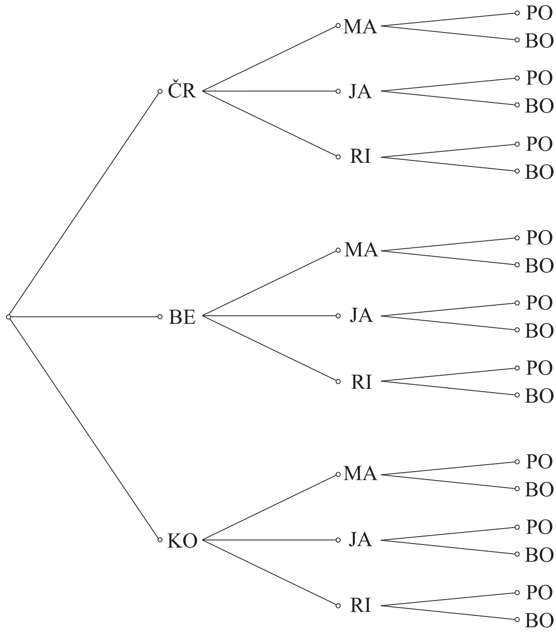
a) $\dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$ **b)** $\dfrac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 2!}$ **c)** $\dfrac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}$ **d)** $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot 2!} - \dfrac{n!}{(n-1)!}$

51. Zapiši vse različne besede, ki jih dobimo s premetavanjem črk (vsako črko besede uporabimo natanko enkrat) besede:

a) TAT **b)** PIPI **c)** OMAMA

Rešitve

1. Sestavi lahko 18 zajtrkov.



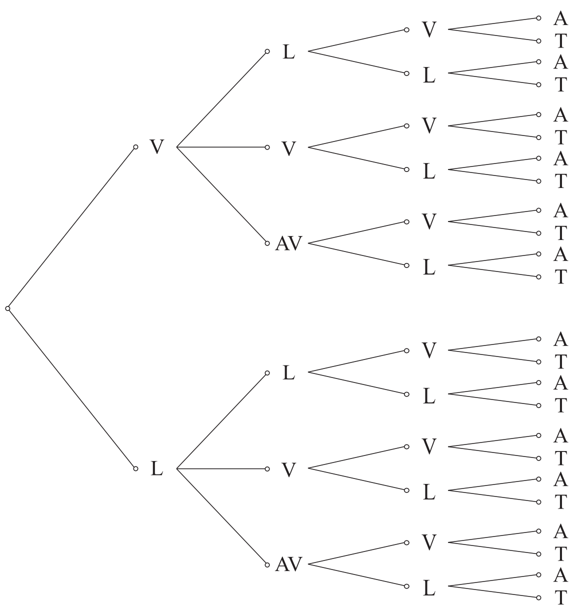
Legenda

<u>Vrste kruha</u>
ČR - črni
BE - beli
KO - koruzni

<u>Vrste marmelad</u>
MA - marelična
JA - jagodna
RI - ribezova

<u>Vrste sokov</u>
PO - pomarančni
BO - borovničev

2. Potovanje si lahko organizira na 24 načinov.



Legenda

<u>Prevozno sredstvo</u>
V - vlak
L - letalo
AV - avtomobil
A - avtobus
T - taksi